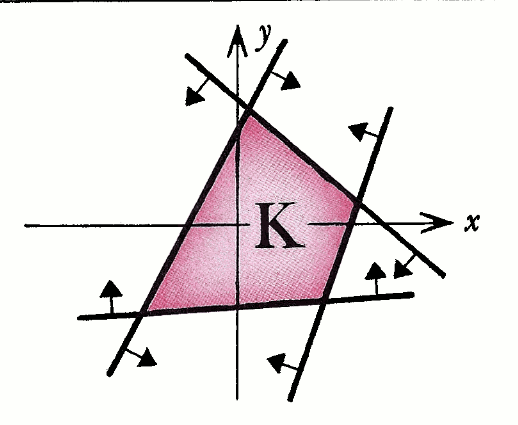
Lecciones populares de matemáticas

SISTEMAS DE DESIGUALDADES LINEALES

A. S. Solodóvnikov



Editorial MIR



Moscú


ИЗДАТЕЛЬСТВО
МИР

LECCIONES POPULARES DE MATEMÁTICAS

A. S. SOLODÓVNIKOV

SISTEMAS DE DESIGUALDADES LINEALES

EDITORIAL MIR
MOSCU

Traducido del ruso por el ing. Cristóbal García Galal

El libro que ofrecemos al lector trata sobre la relación entre sistemas de desigualdades lineales y poliedros convexos; contiene la descripción de los conjuntos de todas las soluciones para desigualdades lineales; estudia las cuestiones de compatibilidad e incompatibilidad; en él se da una introducción elemental a la programación lineal que, de hecho, es uno de los capítulos de la teoría de desigualdades lineales. En el último párrafo se expone el método de solución del problema del transporte en la programación lineal.

El libro no requiere preparación especial y está destinado para un círculo amplio de lectores.

На испанском языке

IMPRESO EN LA URSS 1980

INDICE

PREFACIO

LAS DESIGUALDADES DE PRIMER GRADO O LINEALES son aquéllas que tienen la forma

$$ax + by + c \geqslant 0$$

(para mayor simplicidad damos una desigualdad con dos incógnitas x e y). La teoría de sistemas de desigualdades lineales es una rama de las matemáticas no extensa, pero sumamente interesante. El interés hacia ella, en gran parte, es debido a la belleza de su contenido geométrico, pues, traducido al lenguaje de la geometría, la definición de un sistema de desigualdades lineales con dos o tres incógnitas significa la representación de una región o recinto convexo y poligonal en un plano, o bien, respectivamente, la representación de un cuerpo convexo y poliédrico en el espacio. Así, por ejemplo, la teoría de los poliedros convexos, que es una parte de la geometría tan antigua como el mundo, se convierte en uno de los capítulos de la teoría de sistemas de desigualdades lineales. Esta teoría tiene partes que agradan el corazón del algebrista; entre ellas, por ejemplo, la formidable analogía entre las propiedades de sistemas de desigualdades lineales y las propiedades de sistemas de *ecuaciones lineales* (todo lo relacionado con las últimas ha sido estudiado hace mucho tiempo y con mucho detalle).

Hasta no hace mucho tiempo podía pensarse que las desigualdades lineales serían siempre objeto de creación puramente matemática. La situación cambia radicalmente a mediados de los años 40 de nuestro siglo, al surgir una nueva rama de las matemáticas aplicadas – *la programación lineal* – con importantes aplicaciones en la economía y técnica. Al fin de cuentas, la programación lineal no es más que una de las partes (aunque muy importante) de la teoría de sistemas de desigualdades lineales.

Precisamente, este no voluminoso libro tiene por objeto dar conocimientos al lector sobre distintos aspectos de la teoría de sistemas de desigualdades lineales: sobre la parte geométrica de la cuestión y los métodos de solución de sistemas estrechamente relacionados con élla; sobre algunas propiedades puramente algebraicas de estos sistemas y sobre cuestiones de la programación lineal. Para su lectura no son precisos conocimientos que superen el curso escolar de matemáticas.

Breves palabras sobre la historia de las cuestiones tratadas en este libro.

No obstante que, por su objeto, la teoría de sistemas de desigualdades lineales forma, al parecer, una de las partes más fundamentales y elementales de las matemáticas, hasta no hace mucho tiempo a ella se dedicaron relativamente poco. A partir de los últimos años del siglo pasado raramente comienzan a aparecer trabajos que tratan de unas u otras propiedades de los sistemas de desigualdades lineales. A este respecto pueden mencionarse nombres de matemáticos tales como G. Minkowski uno de los más grandes geómetras de fines del siglo pasado y comienzos de éste, conocido, sobre todo, por sus trabajos sobre multitudes convexas y como autor de la "geometría de Minkowski"; G. F. Voronoy (uno de los fundadores, en Peterburgo, de la "escuela de la teoría de los números"); A. Haar (matemático húngaro, conocido por sus trabajos sobre la "integración por grupos"); G. Weyl (uno de los más prominentes matemáticos de la primera mitad de nuestro siglo, sobre su vida y obra se puede leer en el folleto de I. M. Yaglom "Herman Weyl", editorial "Znanie" M., 1967). Algunos de los resultados obtenidos por ellos, de una u otra forma, van reflejados en este libro (aunque sin mencionar a sus autores). De hecho, la teoría de sistemas de desigualdades lineales comienza a desarrollarse con intensidad a partir de los años 40 a 50 de nuestro siglo, cuando el desarrollo impetuoso de las asignaturas aplicadas (la programación lineal, convexa y otras variedades la "programación matemática"; la así llamada "teoría de los juegos" y otras) hace indispensable el estudio profundo y sistemático de las desigualdades lineales. Actualmente, una lista completa de artículos y libros sobre las desigualdades lineales contaría seguramente, con centenares de distintos títulos.

§ 1. ALGUNOS HECHOS DE LA GEOMETRÍA ANALÍTICA

1°. *Operaciones con los puntos.* Tracemos en un plano un sistema rectangular de coordenadas. El punto M tiene en este sistema las coordenadas x e y, que escribimos de la siguiente forma:

$$M = (x, y) \quad \text{o simplemente,} \quad M(x, y).$$

El sistema de coordenadas permite realizar con los puntos del plano algunas operaciones, tales como *adición de puntos y multiplicación de puntos por un número.*

La adición de puntos se define de la siguiente forma: si $M_1 = (x_1, y_1)$ y $M_2 = (x_2, y_2)$, entonces

$$M_1 + M_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2).$$

Así, pues, la adición de puntos se reduce a la adición de sus coordenadas con el mismo nombre.

El sentido geométrico de esta operación es muy simple (fig. 1): el punto $M_1 + M_2$ es el cuarto vértice del paralelogramo construido en los segmentos OM_1 y OM_2 como lados (O es origen de coordenadas). Los otros tres vértices del paralelogramo son M_1, O, M_2.

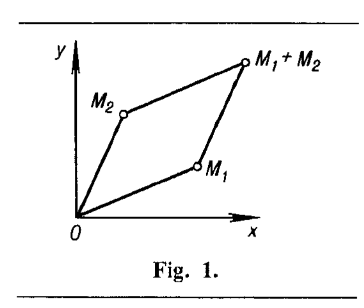


Fig. 1.

Esto mismo puede ser explicado de otra forma: el punto $M_1 + M_2$ se obtiene del punto M_2, procediendo a la traslación paralela de este último en dirección al segmento OM_1 y a una distancia igual a la longitud de este segmento.

La multiplicación del punto $M(x, y)$ por un número arbitrario k se realiza conforme a la regla siguiente

$$kM = (kx, ky).$$

El sentido geométrico de esta operación es aún más simple que el de la operación de adición: siendo $k > 0$ el punto $M' = kM$ yace en el rayo OM, además $OM' = k \cdot OM$; siendo $k < 0$ el punto M' yace en la prolongación del rayo OM más allá del punto O, además $OM' = |k| \cdot OM$ (fig. 2).

La deducción de la interpretación geométrica que acabamos

de dar a estas dos operaciones será un ejercicio no malo para nuestro lector*).

Estas operaciones son muy cómodas para traducir hechos geométricos al lenguaje del álgebra. Daremos algunos ejemplos de tales traducciones.

1. *El segmento* M_1M_2 *está compuesto por todos los puntos de la forma*

$$s_1M_1 + s_2M_2,$$

siendo s_1 y s_2 *dos cualesquera números no negativos, cuya suma es igual a* 1.

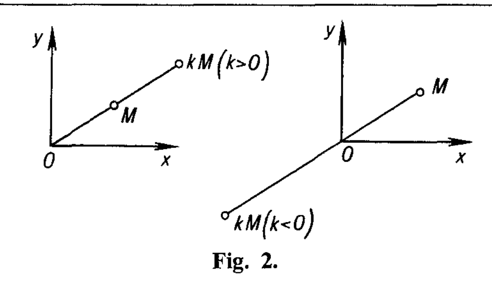


Fig. 2.

Aquí, un hecho puramente geométrico, la pertenencia de un punto al segmento M_1M_2, se expresa en forma de relación algebraica $M = s_1M_1 + s_2M_2$ con las limitaciones para s_1 y s_2 establecidas anteriormente.

Para demostrarlo, veamos el punto arbitrario M situado en el segmento M_1M_2. Trazando líneas rectas, a través del punto M, paralelas a OM_2 y OM_1 obtenemos el punto N_1, situado en el segmento OM_1 y el punto N_2, situado en el segmento OM_2 (fig. 3). Supongamos que

$$s_1 = \frac{M_2M}{M_2M_1}, \quad s_2 = \frac{M_1M}{M_1M_2};$$

*) Si el lector desconoce los fundamentos de la teoría de los vectores. Como es sabido, bajo el punto de vista de la teoría vectorial, nuestras operaciones significan lo siguiente: el punto $M_1 + M_2$ es el extremo del vector $\overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2}$ y el punto kM, el extremo del vector $k \cdot \overrightarrow{OM}$ (con la condición de que el origen de este vector es el punto O).

los números s_1 y s_2 no son negativos y su suma se iguala a 1. De la semejanza de los respectivos triángulos hallamos

$$\frac{ON_1}{OM_1} = \frac{M_2M}{M_2M_1} = s_1, \quad \frac{ON_2}{OM_2} = \frac{M_1M}{M_1M_2} = s_2,$$

de donde se deduce: $N_1 = s_1M_1$; $N_2 = s_2M_2$. Pero $M = N_1 + N_2$, por lo tanto $M = s_1M_1 + s_2M_2$. Por último, observaremos que cuando el punto M recorre el segmento M_1M_2 en dirección de M_1 a M_2, el número s_2 adquiere todos los valores desde 0 hasta 1. La afirmación 1) queda demostrada.

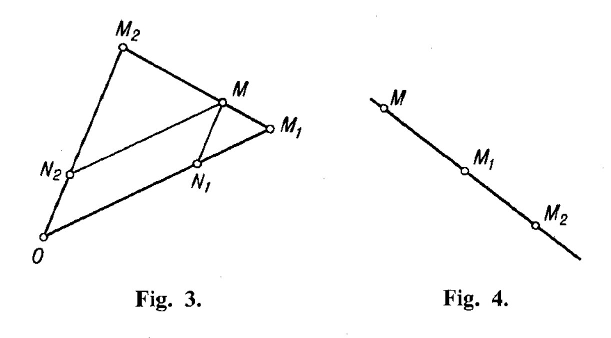


Fig. 3. **Fig. 4.**

2. *Cualquier punto M en la recta M_1M_2 se expresa de la forma*

$$tM_1 + (1 - t)M_2,$$

siendo t un cierto número.

Verdaderamente, si el punto M yace en el segmento M_1M_2, entonces nuestra afirmación se deduce de lo anteriormente demostrado. Supongamos que M yace fuera del segmento M_1M_2. Entonces o el punto M_1 yace en el segmento MM_2 (como en la fig. 4), o M_2 yace en el segmento MM_1. Supongamos, por ejemplo, que tiene lugar el primer caso. Entonces, conforme a lo ya demostrado,

$$M_1 = sM + (1 - s)M_2 \quad (0 < s < 1).$$

De donde

$$M = \frac{1}{s}M_1 - \frac{1-s}{s}M_2 = tM_1 + (1 - t)M_2,$$

siendo $t = \frac{1}{s}$. Proponemos al lector examinar el caso en que M_2 yace en el segmento MM_1.

3. *Cuando el parámetro s crece desde* 0 *hasta* ∞, *el punto* sB *recorre el rayo* OB*), *y el punto* $A + sB$, *el rayo saliente de* A *en dirección a* OB. *Cuando s decrece desde* 0 *hasta* $-\infty$, *los puntos* sB *y* $A + sB$ *recorren rayos complementarios a los indicados anteriormente.* Para demostrarlo basta con fijarse en las fig. 5 y 6.

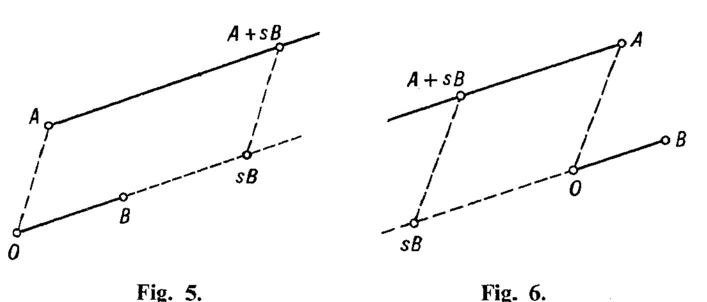


Fig. 5. Fig. 6.

De la afirmación 3) se deduce que, cuando s varía desde $-\infty$ hasta $+\infty$ el punto $A + sB$ recorre la recta que pasa por A paralelamente a OB.

Está claro que las operaciones de adición y multiplicación por un número también pueden realizarse con puntos situados en el espacio. En este caso, conforme a la definición,

$$M_1 + M_2 = (x_1 + x_2,\ y_1 + y_2,\ z_1 + z_2),$$
$$kM = (kx,\ ky,\ kz).$$

Lógicamente todas las afirmaciones demostradas anteriormente serán justas también en el espacio.

Para dar fin a esta parte tomaremos un acuerdo, que más adelante nos servirá para formular muchos hechos con más claridad y laconismo. Precisamente, si $\mathscr{K}$ y $\mathscr{L}$ son dos cualesquara conjuntos de puntos (en un plano o espacio), acordaremos considerar por su "suma" $\mathscr{K} + \mathscr{L}$ el conjunto de todos los puntos de la forma

*) Se supone que el punto B es distinto del origen de las coordenadas, O.

$K + L$, siendo K un punto arbitrario de $\mathscr{K}$, y L, un punto arbitrario de $\mathscr{L}$.

En las matemáticas hace ya tiempo que se utiliza una escritura especial para indicar la pertenencia de cualquier punto a un conjunto determinado. Concretamente, para indicar que el punto M pertenece al conjunto $\mathscr{M}$ se escribe $M \in \mathscr{M}$ (el signo $\in$ sustituye la palabra "pertenece"). O sea, $\mathscr{K} + \mathscr{L}$ es el conjunto de todos los puntos de la forma $K + L$, siendo $K \in \mathscr{K}$ y $L \in \mathscr{L}$.

Partiendo del sentido geométrico de la adición de puntos, podemos deducir una regla simple para adicionar los conjuntos puntuales $\mathscr{K}$ y $\mathscr{L}$. Esta regla consiste en lo siguiente: para cada punto $K \in \mathscr{K}$ es preciso formar un conjunto que resulta de $\mathscr{L}$ mediante su traslado paralelo al segmento OK; a continuación todos los conjuntos, obtenidos de esta forma, se unen en uno. Este último será $\mathscr{K} + \mathscr{L}$.

Daremos algunos ejemplos.

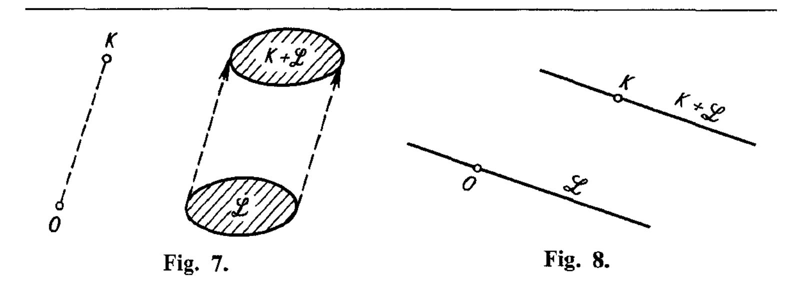


Fig. 7. Fig. 8.

1. Supongamos que el conjunto $\mathscr{K}$ está compuesto por un punto K, mientras que $\mathscr{L}$ contiene un conjunto de puntos cualquiera.

El conjunto $K + \mathscr{L}$ es el resultado de un traslado paralelo del conjunto $\mathscr{L}$ al segmento OK (fig. 7). En particular, si $\mathscr{L}$ es una recta, entonces $K + \mathscr{L}$ será una recta paralela a $\mathscr{L}$. Si en este caso la recta $\mathscr{L}$ pasa por el origen de las coordenadas, entonces $K + \mathscr{L}$ será una recta paralela a $\mathscr{L}$ que pasa por el punto K (fig. 8).

2. $\mathscr{K}$ y $\mathscr{L}$ son segmentos (en un plano o en el espacio) no paralelos entre sí (fig. 9). Entonces el conjunto $\mathscr{K} + \mathscr{L}$ es un paralelogramo con lados iguales y paralelos a $\mathscr{K}$ y $\mathscr{L}$ (respectivamente). ¿Qué resulta cuando los segmentos $\mathscr{K}$ y $\mathscr{L}$ son paralelos?

3. $\mathscr{K}$ es un plano, y $\mathscr{L}$ un segmento no paralelo a este plano.

El conjunto $\mathscr{K} + \mathscr{L}$ es una parte del espacio, comprendida entre dos planos paralelos a $\mathscr{K}$ (fig. 10).
4. $\mathscr{K}$ y $\mathscr{L}$ son círculos de radios r_1 y r_2 con sus respectivos centros P_1 y P_2, que yacen en un mismo plano π. Entonces $\mathscr{K} + \mathscr{L}$ es un círculo que yace en un plano paralelo a π con radio $r_1 + r_2$ y centro en el punto $P_1 + P_2$ (fig. 11).

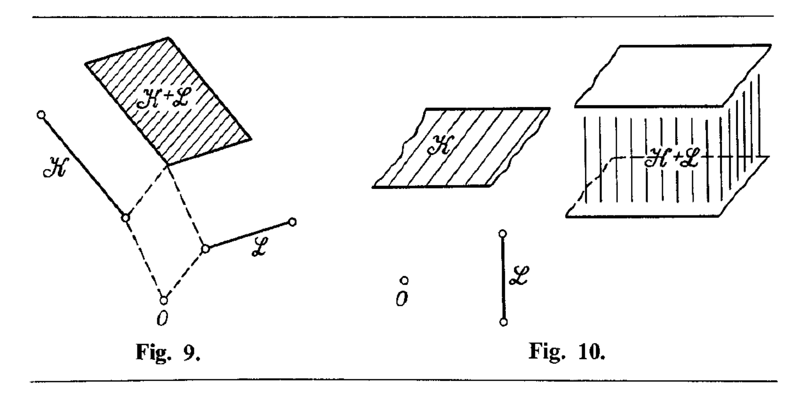


Fig. 9. Fig. 10.

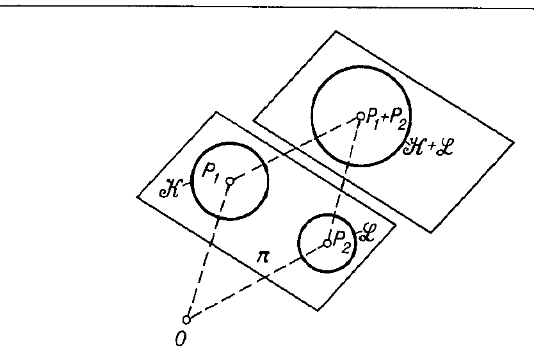


Fig. 11.

2°. *Sentido geométrico de ecuaciones y desigualdades de primer grado con dos o tres incógnitas.*

Examinemos la ecuación de primer grado con dos incógnitas x e y:

$$ax + by + c = 0. \qquad (1)$$

Considerando a x e y como coordenadas de un punto en un plano, es lógico que surja la pregunta: ¿qué conjunto en este plano forman los puntos cuyas coordenadas satisfacen la ecuación (1)? o más breve: ¿qué conjunto de puntos determina la ecuación (1)?

Daremos respuesta, aunque quizás sea conocida para el lector: *la multitud de puntos, determinados por la ecuación* (1), *es una línea recta en un plano.* En efecto, si $b \neq 0$, entonces la ecuación (1) se reduce a la forma

$$y = kx + p,$$

y, como es sabido, esta ecuación determina una recta. Si por el contrario $b = 0$, entonces la ecuación se reduce a la forma

$$x = h$$

y determina una recta paralela al eje de las coordenadas.

Semejante pregunta surge también con relación a la desigualdad

$$ax + by + c \geqslant 0. \quad (2)$$

¿Qué conjunto de puntos determina en un plano la desigualdad (2)?

También aquí la respuesta es simple. Si $b \neq 0$, entonces la desigualdad dada se reduce a una de las dos formas

$$y \geqslant kx + p \quad \text{o} \quad y \leqslant kx + p.$$

No es difícil observar que a la primera de estas dos desigualdades satisfacen todos los puntos situados "por encima" de la recta $y = kx + p$ o en esta recta, mientras que a la segunda, todos los puntos situados "por debajo" de la recta $y = kx + p$ o en la misma (fig. 12). Siendo $b = 0$ la desigualdad (2) se reduce a una de las formas

$$x \geqslant h \quad \text{o} \quad x \leqslant h;$$

a la primera de ellas satisfacen todos los puntos situados "a la derecha" de la recta $x = h$ o en esta recta; a la segunda, todos los puntos situados "a la izquierda" de la recta $x = h$ o en dicha recta (fig. 13).

Así, pues, *la ecuación* (1) *determina en un plano de coordenadas una línea recta y la desigualdad* (2), *uno de los dos semiplanos en que esta recta corta dicho plano* (consideramos que esta recta pertenece a cualquiera de los dos semiplanos determinados por ella misma).

Ahora resolveremos cuestiones análogas con relación a la ecuación

$$ax + by + cz + d = 0, \tag{3}$$

y a la desigualdad

$$ax + by + cz + d \geqslant 0; \tag{4}$$

claro está que para ello x, y, z deberán considerarse como coordenadas de un punto *en el espacio.*

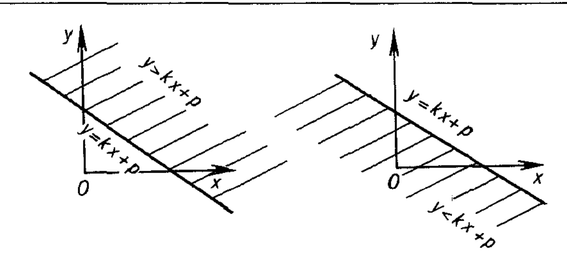


Fig. 12.

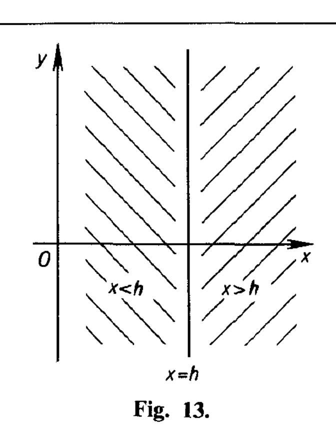


Fig. 13.

El resultado, como no es difícil prever, será el siguiente.

TEOREMA. *La ecuación* (3) *determina en el espacio cierto plano, y la desigualdad* (4), *uno de los dos semiespacios en los que dicho plano corta a todo el espacio* (el mismo plano se considera per-

teneciente a cualquiera de los dos semiespacios determinados por él).

DEMOSTRACIÓN. De tres números a, b y c por lo menos uno es diferente de cero; sea, por ejemplo, $c \neq 0$. Entonces la ecuación (3) se reduce a la forma

$$z = kx + ly + p. \quad (5)$$

Designemos por $\mathscr{L}$ el conjunto de puntos $M(x, y, z)$ que verifican la ecuación (5). Nuestro fin es demostrar que $\mathscr{L}$ es un plano.

Veamos que puntos de $\mathscr{L}$ pertenecen al plano de coordenadas yOz. Para ello consideramos que en la ecuación (5) $x = 0$. Tenemos entonces

$$z = ly + p. \quad (6)$$

Así, pues, la intersección de $\mathscr{L}$ con el plano yOz es la recta u, determinada en este plano por la ecuación (6) (fig. 14).

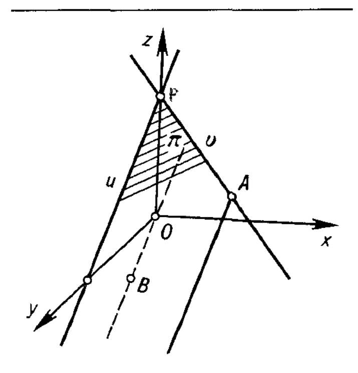


Fig. 14.

De la misma forma hallamos que la intersección de $\mathscr{L}$ con el plano xOz es la recta v, determinada en este plano por la ecuación

$$z = kx + p. \quad (7)$$

Las dos rectas u y v pasan por el punto $P(0, 0, p)$.

Designemos por π el plano que contiene las rectas u y v. Demostremos que π pertenece al conjunto $\mathscr{L}$.

Para ello será suficiente establecer el siguiente hecho: la recta

que pase por cualquier punto $A \in v$ paralela a u pertenece a $\mathscr{L}$.

Primeramente hallaremos cualquier punto B, tal que $OB \parallel u$. En el plano yOz la ecuación $z = ly + p$ determina la recta u; por consiguiente, la ecuación $z = ly$ determina una recta paralela a u, que pasa por el origen de las coordenadas (en la fig. 14 se da en línea a trazos). En calidad de B se puede tomar un punto con coordenadas $y = 1$, $z = l$, yaciente en esta recta.

El punto arbitrario $A \in v$ tiene las coordenadas x, 0, $kx + p$. El punto B elegido por nosotros, tiene las coordenadas 0, 1, l. La recta que pasa por A paralelamente a u está compuesta por los puntos

$$A + sB = (x,\ 0,\ kx + p) + s\,(0,\ 1,\ l) = (x,\ s,\ kx + p + sl),$$

siendo s un número arbitrario (véase la afirmación 3) en el reparto 1°). Es fácil comprobar que las coordenadas del punto $A + sB$ verifican la ecuación (5), es decir, $A + sB \in \mathscr{L}$. Con ello, queda demostrado que el plano π pertenece totalmente al conjunto $\mathscr{L}$.

Nos queda por dar el último paso, o sea, demostrar que $\mathscr{L}$ *coincide* con π, es decir, que el conjunto $\mathscr{L}$ no contiene ningún punto fuera de π.

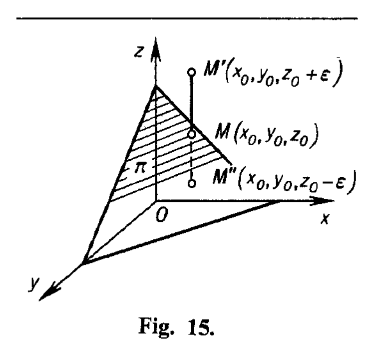


Fig. 15.

Para demostrarlo examinemos tres puntos: el punto $M\,(x_0,\ y_0,\ z_0)$, satuado en el plano π; el punto $M'\,(x_0,\ y_0,\ z_0 + \varepsilon)$, situado "sobre" el plano π $(\varepsilon > 0)$ y el punto $M''\ x_0,\ y_0,\ z_0 - \varepsilon)$, situado "bajo" el plano π (fig. 15). Como $M \in \pi$, entonces $z_0 = kx_0 + ly_0 + p$ y, por consiguiente,

$$z_0 + \varepsilon > kx_0 + ly_0 + p,$$

$$z_0 - \varepsilon < kx_0 + ly_0 + p.$$

De esto se deduce que las coordenadas del punto M' satisfacen la desigualdad estricta

$$z > kx + ly + p,$$

y las coordenadas del punto M'', la desigualdad estricta

$$z < kx + ly + p.$$

Por lo tanto, M' y M'' no pertenecen a $\mathscr{L}$. Esto demuestra que $\mathscr{L}$ coincide con el plano π. Además, de nuestros razonamientos, se deduce que el conjunto de todos los puntos, que verifican la desigualdad

$$ax + by + cz + d \geqslant 0,$$

forma uno de los dos semiespacios ("superior" o "inferior") en que el plano π divide todo el espacio.

§ 2. SENTIDO GEOMÉTRICO DE UN SISTEMA DE DESIGUALDADES LINEALES CON DOS O TRES INCÓGNITAS

Sea dado el sistema de desigualdades

$$\left.\begin{array}{r} a_1x + b_1y + c_1 \geqslant 0, \\ a_2x + b_2y + c_2 \geqslant 0, \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_mx + b_my + c_m \geqslant 0, \end{array}\right\} \qquad (1)$$

con dos incógnitas x e y.

La primera desigualdad de este sistema determina en un plano de coordenadas xOy cierto semiplano Π_1, la segunda, el semiplano Π_2 y así sucesivamente. Si cualquier par de números x, y, satisface todas las desigualdades (1), entonces el punto $M(x, y)$ pertenece a todos los semiplanos $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_m$ al mismo tiempo. En otros términos, el punto M pertenece a la *intersección* (parte común) de dichos semiplanos. Es fácil ver que la intersección de una cantidad finita de semiplanos representa una región poligonal $\mathscr{K}$. En la fig. 16 se muestra una de estas posibles regiones $\mathscr{K}$. A lo largo del contorno de esta región, se

dan rayas dirigidas hacia el interior de la región. Estas rayas al mismo tiempo, indican a qué lado de cada recta yace el respectivo semiplano; lo mismo indican las flechas.

La región, o recinto, $\mathscr{K}$ se llama *región de soluciones del sistema* (1). Al mismo tiempo indicamos que la región de soluciones no siempre es limitada; como resultado de la intersección de varios semiplanos puede surgir también una región ilimitada como, por ejemplo, la región dada en la fig. 17. Teniendo en

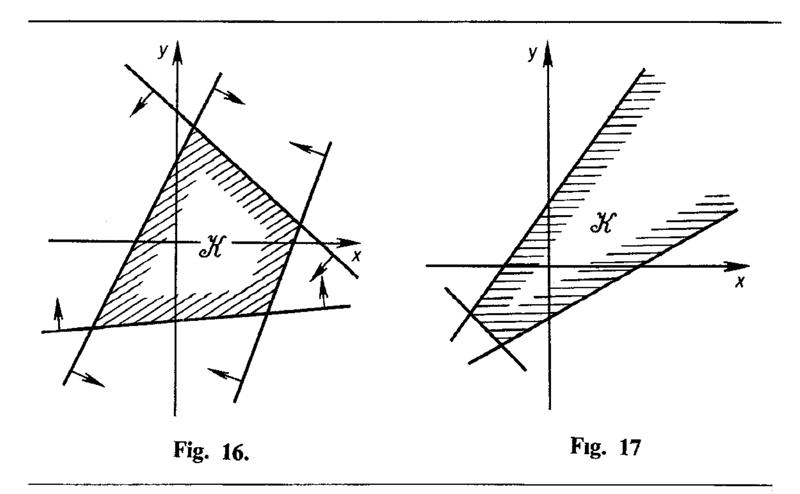


Fig. 16. **Fig. 17**

cuenta el hecho de que el contorno de la región $\mathscr{K}$ está formado por trazos de rectas (o por rectas completas), consideramos que $\mathscr{K}$ es una *región poligonal* [observaremos que cuando la región $\mathscr{K}$ es litimada se llama simplemente *polígono**) *de soluciones del sistema* (1)]. Claro está que también es posible el caso cuando no hay ni un punto común a todos los semiespacios considera-

*) Aquí debemos hacer una advertencia para evitar malentendidos. En el curso escolar de geometría, por "polígono" se entiende *una línea* cerrada compuesta por segmentos de rectas. Mientras tanto en la literatura sobre desigualdades lineales este término significa no la propia línea, sino el conjunto *de todos los puntos del plano, abarcados por ella* (es decir, yacientes dentro o en la misma línea). Más adelante el término "polígono" se interpreta precisamente en este último sentido.

dos, es decir, cuando la región $\mathscr{K}$ está "vacía"; esto significa que el sistema (1) es contradictorio. Este caso viene dado en la fig. 18.

La región de soluciones $\mathscr{K}$ es siempre convexa. Recordaremos que, según la definición general, *el conjunto de puntos (en un plano o espacio) se llama* CONVEXO, *si junto con dos cualesquiera de sus puntos A y B ésta contiene todo el segmento AB.* En la fig. 19 se demuestra la diferencia entre conjuntos convexos y no convexos.

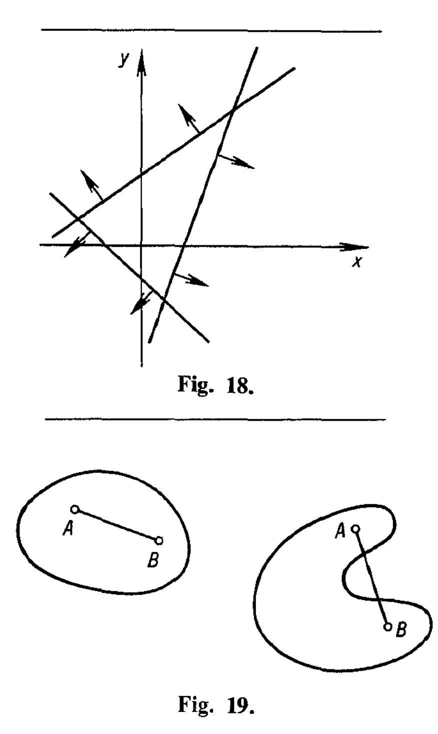


Fig. 18.

Fig. 19.

La convexidad de la región de soluciones $\mathscr{K}$ se deduce del propio procedimiento de formación de esta región; pues, esta última, se ha obtenido mediante la intersección de varios semiplanos, cada uno de los cuales es un conjunto convexo.

Además, para que no quede ninguna duda con relación a la convexidad de $\mathscr{K}$, demostraremos el siguiente lema.

LEMA. *La intersección de cualquier número de conjuntos convexos es un conjunto convexo.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $\mathcal{K}_1$ y $\mathcal{K}_2$ dos conjuntos convexos y $\mathcal{K}$, su intersección. Examinemos dos puntos cualesquiera A y B pertenecientes a $\mathcal{K}$ (fig. 20). Como $A \in \mathcal{K}_1$, $B \in \mathcal{K}_1$ y el conjunto $\mathcal{K}_1$ es convexo, entonces el segmento AB pertenece a $\mathcal{K}_1$. De forma análoga el segmento AB pertenece a $\mathcal{K}_2$. O sea, el segmento AB pertenece, al mismo tiempo, a los dos conjuntos $\mathcal{K}_1$ y $\mathcal{K}_2$ y, por consiguiente, también a la intersección de ambos $\mathcal{K}$. Con esto queda demostrado que $\mathcal{K}$ es un conjunto convexo. Una reflexión análoga nos demuestra que la intersección de cualquier número (no obligatoriamente de dos) de conjuntos convexos es un conjunto convexo.

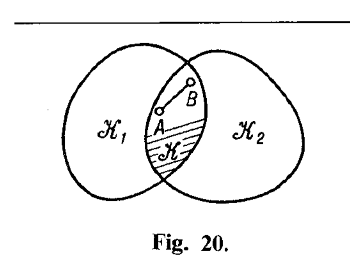


Fig. 20.

Así, pues, el lugar geométrico de los puntos cuyas coordenadas satisfacen todas las desigualdades (1), *o la región de soluciones del sistema* (1), *es la región convexa y poligonal $\mathcal{K}$. Esta región surge como resultado de la intersección de todos los semiplanos, que corresponden a las desigualdades del sistema dado.*

Examinemos el caso de tres incógnitas. Ahora tenemos dado el sistema

$$\left.\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 \geqslant 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 \geqslant 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_mx + b_my + c_mz + d_m \geqslant 0. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Como es sabido por el párrafo 1, cada una de estas desigualdades determina cierto semiespacio. Por lo tanto, la región determinada por este sistema representará la intersección (parte común) de m semiespacios. Pero la intersección de una cantidad finita de semies-

pacios es cierta región convexa y poliédrica $\mathscr{K}$. En la fig. 21 se da un ejemplo de tal región, siendo $m = 4$. En este ejemplo la región $\mathscr{K}$ representa un simple tetraedro (más exacto, $\mathscr{K}$ está compuesta por todos los puntos que yacen dentro y en las superficies del tetraedro). Y, en general, no es difícil comprobar que cualquier poliedro convexo puede obtenerse a consecuencia de la intersección de una cantidad finita de semiespacios*). Claro que

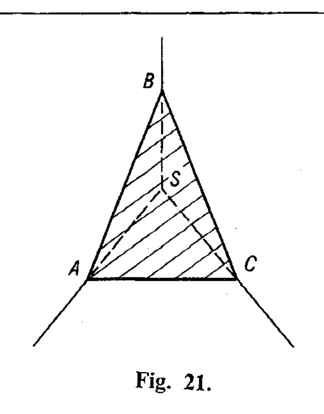


Fig. 21.

también es posible el caso cuando la región $\mathscr{K}$ no es limitada (se extiende infinitamente); un ejemplo de tal región se da en la fig. 22. Por último, puede suceder que no existan, en general, puntos que satisfagan a todas las desigualdades consideradas [el sistema (2) es contradictorio]; entonces la región $\mathscr{K}$ está vacía. Un caso semejante está representado en la fig. 23.

Especialmente, debemos detenernos en el caso cuando entre las desigualdades (2) hay dos

$$ax + by + cz + d \geqslant 0,$$

*) Esta parte necesita una aclaración semejante a la dada en la pág. 20. La cuestión es que en el curso escolar de geometría, por "poliedro" se comprende *una superficie* cerrada, compuesta por caras planas. Nosotros vamos a depositar en este término un contenido más amplio, denominando por "poliedro", no a la propia superficie, sino *al conjunto de todos los puntos del espacio abarcados por éste* (naturalmente, este conjunto incluye también la misma superficie, pero solamente como parte).

$$-ax - by - cz - d \geqslant 0,$$

tales, que puedan ser sustituidas por una sola *ecuación*

$$ax + by + cz + d = 0.$$

Esta última determina cierto plano π en el espacio. Las otras desigualdades (2) determinan en el plano π cierta región convexa y poligonal, la cual sirve como región de soluciones del sistema (2). Vemos, *que un caso particular de región convexa y poliédrica en el espacio puede servir una región convexa y poligonal en un plano.*

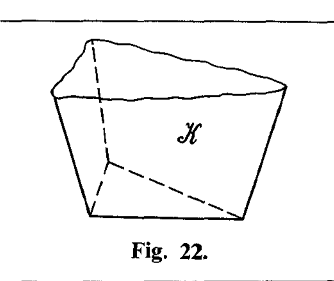


Fig. 22.

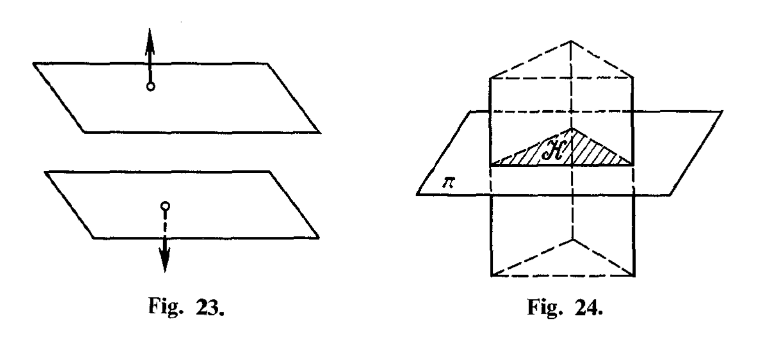


Fig. 23. Fig. 24.

En la fig. 24 la región $\mathscr{K}$ es un triángulo, constituido por la intersección de cinco semiespacios: dos de ellos están limitados por un plano "horizontal" π y los otros tres forman en la intersección un prisma triedro "vertical".

Por ser un caso análogo al de dos incógnitas, denominaremos la región $\mathscr{K}$ por *región de soluciones del sistema (2).* Subrayamos una vez más la circunstancia de que la región $\mathscr{K}$ por ser la

intersección de un cierto número de semiespacios, es forzosamente convexa.

O sea, *el sistema* (2) *determina en el espacio una región* $\mathscr{K}$, *convexa y poliédrica. Esta última es resultado de la intersección de todos los semiespacios que satisfacen las desigualdades del sistema dado.*

Si $\mathscr{K}$ es una región limitada, entonces se denomina, simplemente, *poliedro de soluciones del sistema* (1).

§ 3. CÁPSULA CONVEXA DE UN SISTEMA DE PUNTOS

Imaginémonos que en un plano con aspecto semejante al de una hoja sin límites de madera contrachapada, en los puntos $A_1, A_2, \ldots, A_p$ están clavados piquetes. Estirando, como es debido, un lazo de goma, abarquemos con él todos los piquetes (en la fig. 25, la línea de trazos). A continuación dejemos el lazo contraerse en la medida que lo permitan los piquetes. El conjunto de puntos, abarcados por el lazo después de contraerse, se muestra en rayado en la fig. 25. Esta multitud representa,

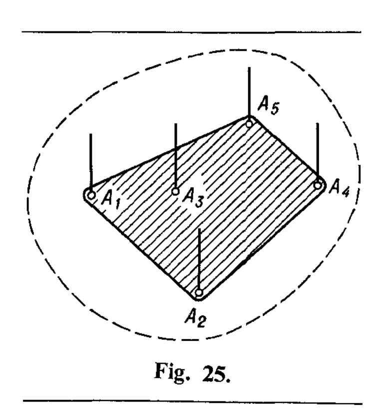


Fig. 25.

naturalmente, un polígono convexo. Este último se llama *cápsula convexa del sistema de puntos* $A_1, A_2, \ldots, A_p$.

Realizar semejante experimento cuando los puntos $A_1, A_2, \ldots, A_p$ se sitúan no en un plano sino en el espacio, prácticamente, es

bastante difícil. No obstante, demos libertad a la imaginación y supongamos que hemos logrado meter los puntos $A_1, A_2, \ldots, A_p$ en un saco de goma fina y sólida. Este saco se contraerá hasta que no comiencen a impedirlo algunos de los puntos. Por fin llegará el momento en que el saco cese de contraerse (fig. 26). Claro que al llegar este momento, el saco toma la forma de un poliedro convexo con sus vértices en algunos de los puntos A_1, $A_2, \ldots, A_p$. La región del espacio abarcada por este poliedro también se llama cápsula convexa del sistema de puntos A_1, $A_2, \ldots, A_p$.

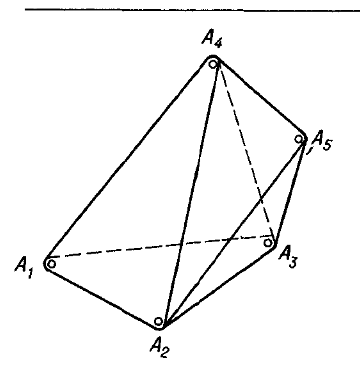


Fig. 26.

La definición que acabamos de dar a la cápsula convexa, aunque es muy evidente, no es del todo irreprochable desde el punto de vista de la "estrictez matemática". A continuación daremos su definición estricta.

Supongamos que $A_1, A_2, \ldots, A_p$ es un conjunto arbitrario de puntos (en un plano o espacio). Examinemos todos los puntos que puedan tener la forma

$$s_1A_1 + s_2A_2 + \ldots + s_pA_p, \tag{1}$$

siendo $s_1, s_2, \ldots, s_p$ cualesquiera números no negativos, cuya suma es igual a la unidad:

$$s_1, s_2, \ldots, s_p \geqslant 0 \quad \text{y} \quad s_1 + s_2 + \ldots + s_p = 1. \tag{2}$$

DEFINICIÓN. *El conjunto de puntos de la forma* (1) *con la condición* (2), *se denomina cápsula convexa del sistema de puntos* $A_1, A_2, \ldots$

..., A_p *y se designa*

$$\langle A_1, A_2, \ldots, A_p\rangle.$$

Para convencernos de que esta definición no difiere de la anterior, veamos primeramente el caso $p = 2$ y $p = 3$. Siendo $p = 2$, tendremos dados dos puntos A_1 y A_2. El conjunto $\langle A_1, A_2\rangle$, conforme a la afirmación 1), párrafo 1, es el segmento A_1A_2.

Si $p = 3$ tendremos dados tres puntos A_1, A_2 y A_3. Demostremos que el conjunto $\langle A_1, A_2, A_3\rangle$ está compuesto por todos los puntos que yacen dentro y en los lados del triángulo $A_1A_2A_3$.

Y en general, demostremos el siguiente lema.

LEMA. *El conjunto* $\langle A_1, \ldots, A_{p-1}, A_p\rangle$ está compuesto por todos los posibles segmentos que unen el punto A_p con los puntos del conjunto $\langle A_1, \ldots, A_{p-1}\rangle$.

DEMOSTRACIÓN. En lo sucesivo, para comodidad de escritura, designaremos el conjunto $\langle A_1, \ldots, A_{p-1}\rangle$ por $\mathscr{M}_{p-1}$ y el conjunto $\langle A_1, \ldots, A_{p-1}, A_p\rangle$ por $\mathscr{M}_p$.

Veamos cualquier punto $A \in \mathscr{M}_p$. Este punto tiene la forma

$$A = s_1A_1 + \ldots + s_{p-1}A_{p-1} + s_pA_p,$$

siendo

$$s_1, \ldots, s_p \geqslant 0, \quad s_1 + \ldots + s_p = 1.$$

Si $s_p = 0$, entonces $A \in \mathscr{M}_{p-1}$, o sea, el conjunto $\mathscr{M}_{p-1}$ es parte de $\mathscr{M}_p$. Si $s_p = 1$, entonces $A = A_p$, o sea, el punto A_p pertenece a $\mathscr{M}_p$. Así pues, $\mathscr{M}_p$ contiene a $\mathscr{M}_{p-1}$ y al punto A_p. A continuación demostraremos que *cualquier segmento* $A'A_p$, *siendo* $A' \in \mathscr{M}_{p-1}$, *pertenece totalmente a* $\mathscr{M}_p$.

Si A es un punto de tal segmento, entonces

$$A = tA' + sA_p \quad (t, s \geqslant 0,\ t + s = 1).$$

Por otra parte, según la definición del punto A', tenemos

$$A' = t_1A_1 + \ldots + t_{p-1}A_{p-1}$$

$$(t_1, \ldots, t_{p-1} \geqslant 0, \quad t_1 + \ldots + t_{p-1} = 1);$$

por consiguiente,

$$A = tt_1A_1 + \ldots + tt_{p-1}A_{p-1} + sA_p.$$

Suponiendo que $tt_1 = s_1, \ldots, tt_{p-1} = s_{p-1}$, $s = s_p$, obtenemos (1) y (2). Con esto queda demostrado que $A \in \mathscr{M}_p$. Así, pues, cualquiera de los segmentos indicados pertenece totalmente a $\mathscr{M}_p$.

Nos queda por comprobar que el conjunto $\mathcal{M}_p$ no tiene otra cosa que no sean dichos segmentos, es decir, que *cualquier punto A de $\mathcal{M}_p$ pertenece a uno de los segmentos a considerar.*

Sea $A \in \mathcal{M}_p$. Entonces tenemos (1) y (2). Se puede considerar $s_p \neq 1$, de lo contrario, $A = A_p$ y entonces no nos quedará qué demostrar. Pero siendo $s_p \neq 1$, entonces $s_1 + \ldots + s_{p-1} = 1 - s_p > 0$, por lo tanto podemos escribir

$$A = (s_1 + \ldots + s_{p-1})\left[\frac{s_1}{s_1 + \ldots + s_{p-1}}A_1 + \ldots \right.$$
$$\left. \ldots + \frac{s_{p-1}}{s_1 + \ldots + s_{p-1}}A_{p-1}\right] + s_pA_p.$$

La expresión entre corchetes determina cierto punto A' perteneciente a $\mathcal{M}_{p-1}$, ya que los coeficientes de $A_1, \ldots, A_{p-1}$, en esta expresión, no son negativos y su suma es igual a 1. O sea,

$$A = (s_1 + \ldots + s_{p-1})A' + s_pA_p.$$

Puesto que los coeficientes de A' y A_p tampoco son negativos y su suma es igual a 1, entonces el punto A se encuentra en el segmento $A'A_p$. Con esto finaliza la demostración del lema.

Ahora no es difícil comprobar que las definiciones evidente y estricta, que damos a la cápsula convexa al comienzo de este párrafo, son equivalentes. En efecto, independientemente a cuál de las dos definiciones utilicemos como base, el paso de la cápsula convexa del sistema $A_1, \ldots, A_{p-1}$ a la cápsula convexa del sistema $A_1, \ldots, A_{p-1}, A_p$ transcurre en ambos casos conforme a una misma regla: el punto A_p debe unirse mediante segmentos con todos los puntos de la cápsula convexa para $A_1, \ldots, A_{p-1}$ (con una definición evidente de cápsula convexa dicha regla se manifiesta directamente; si la definición es estricta, esta regla forma el contenido del lema). Ahora, si tenemos en cuenta que siendo $p = 2$, conforme a ambas definiciones, obtenemos un mismo conjunto, o sea, el segmento A_1A_2, entonces la equivalencia de las dos definiciones se hace evidente.

Mas aún no hemos justificado por completo el término "cápsula convexa", pues, todavía no tenemos demostrado que el conjunto $\langle A_1, A_2, \ldots, A_p\rangle$ *es siempre convexo.* Hagámoslo a continuación.

Sean A y B dos puntos arbitrarios de este conjunto:

$$A = s_1A_1 + s_2A_2 + \ldots + s_pA_p,$$
$$B = t_1A_1 + t_2A_2 + \ldots + t_pA_p,$$

siendo

$$s_1, \ldots, s_p t_1, \ldots, t_p \geqslant 0,$$
$$s_1 + \ldots + s_p = t_1 + \ldots + t_p = 1. \qquad (3)$$

Cualquier punto C del segmento AB tiene la forma

$$C = sA + tB,$$

siendo $s, t \geqslant 0$, $s + t = 1$, (4)
de esto se deduce

$$C = s(s_1 A_1 + \ldots + s_p A_p) + t(t_1 A_1 + \ldots + t_p A_p) =$$
$$= (ss_1 + tt_1) A_1 + \ldots + (ss_p + tt_p) A_p.$$

Conforme se deduce de (3) y (4) los números que son coeficientes de $A_1, \ldots, A_p$ no son negativos y su suma es igual a 1. Esto significa que el punto C pertenece al conjunto $\langle A_1, A_2, \ldots, A_p \rangle$, es decir, que este conjunto es convexo.

Al mismo tiempo, no es difícil comprobar que $\langle A_1, A_2, \ldots, A_p \rangle$ es el conjunto menor entre todos los conjuntos convexos que contienen los puntos iniciales $A_1, A_2, \ldots, A_p$, es decir, que este conjunto va incluido en cualquiera de tales conjuntos. Esta afirmación se deduce directamente de la demostración del lema anterior, y de la definición de conjunto convexo.

Este hecho da explicación a la denominación de "cápsula convexa". Al mismo tiempo da una explicación más al hecho de que el conjunto $\langle A_1, A_2, \ldots, A_p \rangle$ puede ser obtenido por el procedimiento descrito al principio de este párrafo. Es que el conjunto abarcado por el lazo de goma (o saco de goma) después que éste se contrae todo lo posible alrededor del sistema de puntos $A_1, A_2, \ldots, A_p$, es, precisamente, el menor conjunto convexo que contiene a dichos puntos.

§ 4. CONO POLIEDRO CONVEXO

Comenzaremos por su definición.

CONO POLIEDRO CONVEXO *se llama la intersección de un número limitado de semiespacios, cuyos planos confines o límites pasan por un mismo punto; este último se llama vértice del cono.*

Primeramente indicaremos qué relación tiene el concepto de cono poliedro convexo con respecto a los sistemas de desi-

gualdades lineales. Nos limitaremos a un caso particular, precisamente, al caso cuando el vértice del cono es el origen de las coordenadas. Esto significa que todos los planos confines pasan por el origen de las coordenadas. Ahora bien, la ecuación de un plano que pasa por el origen de las coordenadas tiene la forma

$$ax + by + cz = 0$$

[el término independiente de esta ecuación debe ser igual a cero de lo contrario (0, 0, 0) no será solución]. Así, pues, *un cono poliedro convexo con el vértice en el origen de las coordenadas es la región de soluciones de cierto sistema de desigualdades homogéneas:*

$$\left.\begin{array}{l} a_1x + b_1y + c_1z \geqslant 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z \geqslant 0, \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_mx + b_my + c_mz \geqslant 0. \end{array}\right\}$$

Naturalmente, también es válido lo inverso: la región de soluciones de un sistema de desigualdades homogéneas siempre

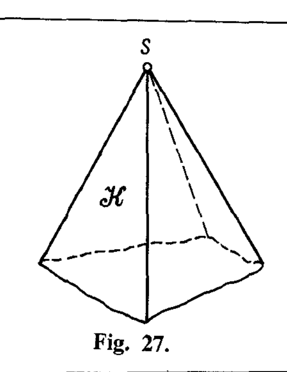


Fig. 27.

representa cierto cono poliedro convexo con el vértice en el origen de las coordenadas.

Ejemplo de cono poliedro convexo puede ser una región convexa en el espacio, cuyos confines o límites es cierto ángulo poliedro con el vértice S, – algo parecido a una pirámide convexa, ilimitada y sin base, que se extiende sin límites desde su vértice – (en la fig. 27 se da una de estas pirámides con cuatro caras).

También pueden haber casos menos interesantes, por ejemplo:

1. Un semiespacio (fig. 28, *a*). En este "cono" vértice puede ser cualquier punto $S \in \pi$; siendo π plano confín de dicho semiespacio.

2. La intersección de dos semiespacios, cuyos planos confines se cortan por una recta l (fig. 28, *b*). Vértice puede ser cualquier punto $S \in l$.

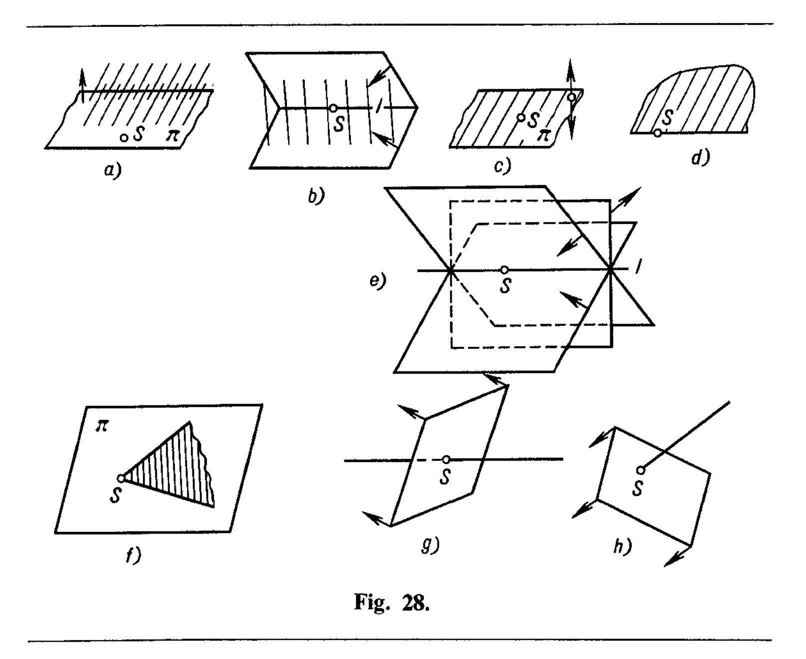


Fig. 28.

3. Un plano. Naturalmente, que cualquier plano π en el espacio puede considerarse como la intersección de dos semiespacios, situados por diferentes lados de π (fig. 28, *c*). En este caso, vértice puede ser cualquier punto $S \in \pi$.

4. Un semiplano (fig. 28, *d*). Vértice S puede ser cualquier punto de la recta confín.

5. Una recta. En el espacio, cada recta l puede obtenerse mediante la intersección de tres semiespacios, cuyos planos confines pasan por l (fig. 28, *e*). El vértice S puede ser cualquier punto de la recta l.

6. Un ángulo (menor que 180°) en un plano arbitrario π

(fig. 28, f). Este ángulo puede resultar de la intersección del plano π con dos semiespacios (¿cómo concretamente?).

7. Un rayo (fig. 28, g). Un rayo puede ser considerado como la intersección de una recta con un semiespacio. Vértice S es el origen del rayo.

8. Un punto. Un "cono" semejante puede obtenerse tomando la parte común entre un rayo y un respectivo semiespacio (fig. 28, h).

Claro que los ejemplos enumerados de 1 a 8 difieren (unos en menor, otros en mayor grado) de la habitual utilización de la palabra "cono", pero nos vemos obligados a conformarnos con ello si queremos conservar la definición general de cono poliedro convexo, dada al principio de este párrafo.

Ahora procuraremos demostrar, en unas palabras, que *los conjuntos que acabamos de enumerar representan todos los conos convexos en el espacio.*

Supongamos que p significa cierta cantidad de semiespacios, cuya intersección constituye el cono considerado $\mathscr{K}$. Siendo $p = 1$, nuestra afirmación es válida, puesto que entonces $\mathscr{K}$ es un semiespacio. Un simple cálculo, que proponemos hacer al lector, muestra que siendo nuestra afirmación válida para el cono obtenido mediante la intersección de p semiespacios, lo será también para un cono obtenido mediante la intersección de $p + 1$ semiespacios. De esto, conforme al principio de inducción matemática completa, se deduce que nuestra afirmación es válida para cualquier p.

Los conos convexos poliedros contienen muchas propiedades interesantes, mas los márgenes de este libro no nos permiten profundizar sobre el tema, no obstante, procuraremos exponer algunos hechos, en parte en este párrafo y en parte en el párrafo 12.

Formulemos una definición más o, si se quiere, una designación.

Sea B_1, B_2, ..., B_q, el conjunto arbitrario de una cantidad finita de puntos (en el espacio). *Con los símbolos* $(B_1, B_2, \ldots, B_q)$ *designaremos el conjunto de puntos de la forma*

$$t_1B_1 + t_2B_2 + \ldots + t_qB_q,$$

siendo t_1, t_2, ..., t_q, *números arbitrarios no negativos.*

¿Qué representa geométricamente el conjunto $(B_1, B_2, \ldots, B_q)$? De la definición queda claro, que este conjunto representa la suma de los conjuntos (B_1), (B_2), ..., (B_q); por eso, primeramente debemos determinar qué representa el conjunto (B), es decir, el

conjunto de puntos de la forma tB, siendo t cualquier número no negativo y B un punto fijado. La respuesta a esta última pregunta es evidente: si B es el origen de las coordenadas, entonces el conjunto (B) también coincide con este origen, de lo contrario (B) es un rayo que parte del origen de dichas coordenadas y que pasa por el punto B. Ahora observemos que la suma de cualquier conjunto con el origen de las coordenadas nos da nuevamente este mismo conjunto; con esto queda claro que al examinar el conjunto $(B_1, B_2, \ldots, B_q)$ no perdemos nada, si *consideramos todos los puntos* $B_1, B_2, \ldots, B_q$ *diferentes del origen de las coordenadas. En este caso, el conjunto* $(B_1, B_2, \ldots, B_q)$ *representará la suma de los rayos* $(B_1), (B_2), \ldots, (B_q)$.

La última observación hace casi evidente el siguiente lema.

LEMA. *El conjunto* $(B_1, \ldots, B_{q-1}, B_q)$ *es la unión de segmentos, que unen cada punto del conjunto* $(B_1, \ldots, B_{q-1})$ *con cada punto del rayo* (B_q).

Una estricta demostración de este lema se hace por el mismo procedimiento que para demostrar el lema análogo del párrafo 3; recomendamos al lector realizarla por su cuenta.

Partiendo de este lema, es fácil deducir que (B_1, B_2) es un ángulo, una recta, o bien un rayo (fig. 29, *a*, *b*, *c*). A continuación

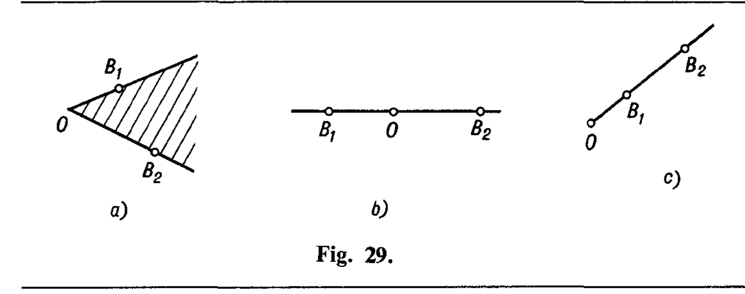


Fig. 29.

será fácil establecer que (B_1, B_2, B_3) es uno de los siguientes conjuntos: una pirámide triangular ilimitada, un plano, un semiplano, un ángulo, una recta o un rayo. Ahora está claro que entre los conjuntos $(B_1, B_2, \ldots, B_q)$ y los conos poliedros convexos debe existir una relación estrecha. Y esta relación efectivamente existe. Para mayor claridad formularemos las respectivas afirmaciones en forma de dos teoremas.

TEOREMA 1. *El conjunto* $(B_1, B_2, \ldots, B_q)$, *o bien coincide con*

todo el espacio, o bien representa cierto cono poliedro convexo con el vértice en el origen de las coordenadas.

En efecto, el conjunto $(B_1, B_2, \ldots, B_q)$, puede coincidir con todo el espacio, lo demuestra el siguiente ejemplo. Consideremos cuatro puntos B_1, B_2, B_3, B_4 situados de tal forma que los rayos (B_1), (B_2), (B_3), (B_4), constituyen, por pares, ángulos obtusos (fig. 30). Cada uno de los conjuntos (B_1, B_2, B_3), (B_1, B_2, B_4),

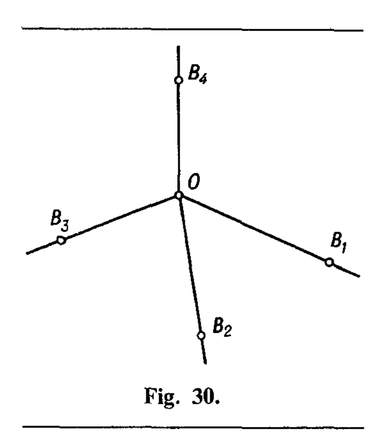


Fig. 30.

(B_1, B_3, B_4), (B_2, B_3, B_4) representa una pirámide triangular ilimitada con el vértice en el origen de las coordenadas. Evidentemente, el conjunto (B_1, B_2, B_3, B_4) contiene cada una de estas pirámides. Ahora bien, la unión de dichas pirámides coincide con todo el espacio.

TEOREMA 2. *Cualquier cono poliedro convexo con el vértice en el origen de las coordenadas es un conjunto de la forma* $(B_1, B_2, \ldots, B_q)$.

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 1. La daremos en rasgos generales. Utilizaremos para ello el método de inducción matemática completa. La confirmación del teorema, siendo $q = 1$, es evidente. Supongamos, ahora, que este teorema se cumple para los conjuntos de la forma $(B_1, \ldots, B_q)$ y, basándonos en este hecho, demostremos su validez para el conjunto $(B_1, \ldots, B_q, B_{q+1})$.

Conforme al presupuesto de inducción, $(B_1, \ldots, B_q)$ representa o todo el espacio, o bien cierto cono poliedro convexo en este espacio. El primer caso, prácticamente, no necesita demostración, puesto que entonces $(B_1, \ldots, B_q, B_{q+1})$ es también todo el espacio. Sea que tiene lugar el segundo caso: $(B_1, \ldots, B_q)$ es el

cono poliedro convexo $\mathscr{K}$. Conforme al lema, el conjunto $(B_1, \ldots, B_q, B_{q+1})$ es la unión de os segmentos que van desde cada punto del conjunto $\mathscr{K}$ hasta cada punto del rayo (B_{q+1}). Pero, como hemos demostrado anteriormente, cualquier cono poliedro convexo $\mathscr{K}$ es, o bien una pirámide convexa ilimitada, o bien uno de los conjuntos $1-8$. Examinando para cada uno de estos dos casos, la unión de segmentos que acabamos de indicar, no es difícil convencerse (hágalo el lector por su cuenta) de que esta unión, o bien coincide con todo el espacio, o bien representa de nuevo un cono poliedro convexo. Así pues, el teorma es válido para conjuntos de la forma (B_1) así como también para $(B_1, \ldots, B_q, B_{q+1})$, puesto que lo hemos considerado justo para $(B_1, \ldots, B_q)$. De ello se deduce que este teorema es válido para cualquier q.

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 2. Supongamos que $\mathscr{K}$ es un cono poliedro convexo con el vértice en el origen de las coordenadas O. Como hemos dicho, $\mathscr{K}$ o bien es una pirámide convexa ilimitada, o bien una de los conjuntos $1-8$.

Supongamos que $\mathscr{K}$ es una pirámide. Elijamos un punto en cada una de sus aristas; obtenemos un sistema de puntos B_1, $B_2, \ldots, B_q$. Afirmamos que *el conjunto* $(B_1, B_2, \ldots, B_q)$ *es, precisamente,* $\mathscr{K}$.

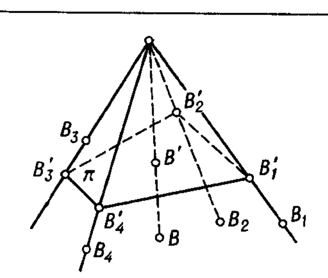


Fig. 31.

Para demostrarlo examinemos un plano cualquiera π, que corta todas las aristas de la pirámide $\mathscr{K}$. Obtenemos los puntos B_1', $B_2', \ldots, B_q'$ (fig. 31). Es evidente que

$$B_1' = k_1 B_1, \quad B_2' = k_2 B_2, \ldots, B_q' = k_q B_q, \tag{1}$$

siendo $k_1, k_2, \ldots, k_q$ ciertos números no negativos.

Supongamos ahora que B es cualquier punto de nuestra pirámide diferente de su vértice O. El rayo OB se cruza con el plano π en cierto punto B'. Es evidente que B' pertenece a la cápsula convexa del sistema $B'_1, B'_2, \ldots, B'_q$ y por lo tanto

$$B' = s_1 B'_1 + s_2 B'_2 + \ldots + s_q B'_q,$$

siendo $s_1, s_2, \ldots, s_q$ números no negativos cuya suma es igual a 1. Ahora, si tenemos en consideración a (1) obtenemos

$$B' = s_1 k_1 B_1 + s_2 k_2 B_2 + \ldots + s_q k_q B_q,$$

y teniendo también en consideración que $B' = kB$ $(k > 0)$, obtenemos

$$B = t_1 B_1 + t_2 B_2 + \ldots + t_q B_q,$$

donde

$$t_i = \frac{s_i k_i}{k} \quad (i = 1, 2, \ldots, q).$$

Así pues, hemos demostrado que cualquier punto B de la pirámide $\mathcal{K}$ pertenece al conjunto $(B_1, B_2, \ldots, B_q)$. Lo inverso, es decir, que cualquier punto del conjunto $(B_1, B_2, \ldots, B_q)$ pertenece a $\mathcal{K}$ es evidente. O sea, $\mathcal{K}$ coincide con $(B_1, B_2, \ldots, B_q)$.

El caso en que $\mathcal{K}$ es uno de los conjuntos exclusivos 1–8, se analiza sin dificultad alguna y por eso se lo concedemos al lector.

§ 5. REGIÓN DE SOLUCIONES DE UN SISTEMA DE DESIGUALDADES CON DOS INCÓGNITAS

Ahora, nuestra tarea es dar una descripción eficaz a todas las soluciones de sistemas de desigualdades lineales. En este párrafo esta tarea se cumple para sistemas con dos incógnitas x e y. No obstante a que el número de incógnitas no es grande (sólo dos), procuraremos analizar estos sistemas desde posiciones generales, es decir, de tal forma que los resultados así obtenidos puedan ser transferidos fácilmente a sistemas con mayor número de incógnitas.

Al fin de cuentas, la solución de cualquier sistema de desigualdades lineales se reduce a la solución de *una serie de sistemas*

de ecuaciones lineales. Nosotros consideraremos la solución de sistemas de ecuaciones lineales como algo simple, como una operación elemental, y no nos desconcertaremos, si para utilizar el método propuesto tenemos que realizar esta operación muchas veces.

1°. LEMAS INDISPENSABLES. Sea dado el sistema de desigualdades

$$\left.\begin{array}{l} a_1x + b_1y + c_1 \geqslant 0, \\ a_2x + b_2y + c_2 \geqslant 0, \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_mx + b_my + c_m \geqslant 0. \end{array}\right\} \quad (1)$$

Resulta conveniente examinar, junto con este sistema, el siguiente sistema de *desigualdades homogéneas.*

$$\left.\begin{array}{l} a_1x + b_1y \geqslant 0, \\ a_2x + b_2y \geqslant 0, \\ \cdots\cdots \\ a_mx + b_my \geqslant 0, \end{array}\right\} \quad (2)$$

y también el sistema correspondiente de *ecuaciones homogéneas.*

$$\left.\begin{array}{l} a_1x + b_1y = 0, \\ a_2x + b_2y = 0, \\ \cdots\cdots \\ a_mx + b_my = 0. \end{array}\right\} \quad (3)$$

La región de soluciones del sistema (1), en un plano de coordenadas xOy, la designaremos por $\mathcal{K}$, la del sistema (2), por $\mathcal{K}_0$ y la del sistema (3), por $\mathcal{L}$. Está claro, que $\mathcal{L} \subset \mathcal{K}_0$ (el símbolo $\subset$ significa "incluido en" *)

LEMA 1. *Se cumple la inclusión*

$$\mathcal{K} + \mathcal{K}_0 \subset \mathcal{K},$$

es decir, *la suma de cualquier solución de un sistema de desigualdades dado con cualquier solución del sistema correspondiente de*

---

*) No se debe confundir el símbolo $\subset$ con el símbolo $\in$ utilizado anteriormente. Este último se utiliza en el caso cuando se trata de *la pertenencia de un punto cualquiera a un conjunto cualquiera.* Cuando se quiere indicar que *un conjunto es parte de otro,* se utiliza el símbolo $\subset$.

desigualdades homogéneas, es nuevamente solución del sistema dado.

DEMOSTRACIÓN. Sea A un punto arbitrario de $\mathscr{K}$ y B, un punto arbitrario de $\mathscr{K}_0$. Entonces son justas las desigualdades

$$\begin{array}{lcl} a_1x_A + b_1y_A + c_1 \geqslant 0 & & a_1x_B + b_1y_B \geqslant 0, \\ a_2x_A + b_2y_A + c_2 \geqslant 0, & & a_2x_B + b_2y_B \geqslant 0, \\ \ldots\ldots\ldots & \text{y} & \ldots\ldots\ldots \\ a_mx_A + b_my_A + c_m \geqslant 0 & & a_mx_B + b_my_B \geqslant 0. \end{array}$$

Sumando cada una de las desigualdades escritas a la izquierda con las correspondientes escritas a la derecha, obtenemos

$$\begin{gathered} a_1(x_A + x_B) + b_1(y_A + y_B) + c_1 \geqslant 0, \\ a_2(x_A + x_B) + b_2(y_A + y_B) + c_2 \geqslant 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_m(x_A + x_B) + b_m(y_A + y_B) + c_m \geqslant 0. \end{gathered}$$

Estas desigualdades significan que el par de números $x_A + x_B$ e $y_A + y_B$ – coordenadas del punto $A + B$ – es solución del sistema inicial (1), es decir, que $A + B \in \mathscr{K}$. Y con esto queda demostrado el lema.

LEMA 2. 1) *Si un rayo, con origen en el punto A, pertenece totalmente al conjunto $\mathscr{K}$, y si P es un punto arbitrario de este rayo, entonces $P - A \in \mathscr{K}_0$.*

2) *Si una recta pertenece totalmente al conjunto $\mathscr{K}$, y si A y P son dos puntos arbitrarios en esta recta, entonces $P - A \in \mathscr{L}$.*

DEMOSTRACIÓN. 1) Designamos el punto $P - A$ por B. El rayo considerado está compuesto por puntos de la siguiente forma

$$A + sB, \tag{4}$$

donde s es un número arbitrario no negativo (fig. 32). Según la condición, cualquiera de estos dos puntos es solución del sistema (1), es decir

$$\left.\begin{gathered} a_1(x_A + sx_B) + b_1(y_A + sy_B) + c_1 \geqslant 0, \\ a_2(x_A + sx_B) + b_2(y_A + sy_B) + c_2 \geqslant 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_m(x_A + sx_B) + b_m(y_A + sy_B) + c_m \geqslant 0. \end{gathered}\right\} \tag{5}$$

Veamos, por ejemplo, la primera de estas desigualdades. Puede ser escrita de la forma

$$(a_1x_A + b_1y_A + c_1) + s(a_1x_B + b_1y_B) \geqslant 0.$$

Puesto que esta desigualdad es justa con *cualquier* $s \geqslant 0$, entonces el coeficiente de s, como no es difícil ver, tiene que ser un número no negativo:

$$a_1 x_B + b_1 y_B \geqslant 0.$$

Analizando de forma análoga las demás desigualdades (5) se puede obtener:

$$a_2 x_B + b_2 y_B \geqslant 0,$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$a_m x_B + b_m y_B \geqslant 0,$$

por lo que vemos que el punto B pertenece al conjunto $\mathscr{K}_0$.

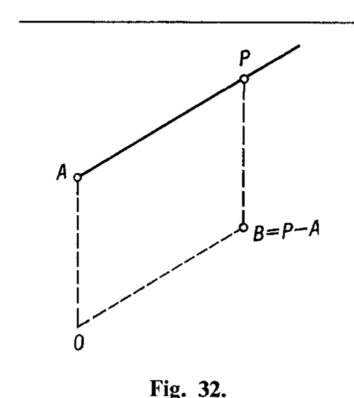


Fig. 32.

La demostración 2) se realiza de forma análoga. La recta considerada se compone por los puntos de la forma (4), donde s es un número arbitrario. Por eso las desigualdades (5) son válidas para cualquier valor de s. De ello se deduce que, en cada una de estas desigualdades, el coeficiente sumario de s debe igualarse a cero, es decir,

$$a_1 x_B + b_1 y_B = 0,$$

$$a_2 x_B + b_2 y_B = 0,$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$a_m x_B + b_m y_B = 0.$$

Por lo tanto, $B \in \mathscr{L}$. El lema queda demostrado.

Fácilmente vemos que los lemas 1 y 2 son válidos para sistemas con cualquier número de incógnitas.

2°. *Caso, en que el sistema de desigualdades* (1) *es normal.* Examinemos nuevamente el sistema de desigualdades (1) y su sistema correspondiente de ecuaciones homogéneas (3). Este último sistema tiene solución evidente $x = 0$, $y = 0$. Esta solución se llama *nula.* Para investigar el sistema (1) resulta importante saber si el sistema (3) tiene también soluciones no nulas. Con este fin introducimos la siguiente.

DEFINICIÓN. *Un sistema de desigualdades lineales se llama normal si su respectivo sistema de ecuaciones lineales y homogéneas tiene solamente solución nula.*

En otras palabras, un sistema de desigualdades es normal, si el conjunto $\mathscr{L}$, determinado anteriormente, siendo región de soluciones del correspondiente sistema homogéneo de ecuaciones, contiene solamente un punto (el origen de las coordenadas).

Está claro que el concepto de sistema normal conserva su sentido para cualquier número de incógnitas.

No es difícil demostrar que *un sistema compatible de desigualdades es normal si, y sólo si, la región de sus soluciones* $\mathscr{K}$ *no contiene ni una recta.*

Efectivamente, si el sistema es normal, o sea, el conjunto $\mathscr{L}$ contiene sólo el origen de las coordenadas, entonces la región $\mathscr{K}$ no contiene rectas; esto se deduce inmediatamente de la segunda afirmación del lema 2. Cuando el sistema no es normal, el conjunto $\mathscr{L}$ contiene, por lo menos, un punto B diferente del origen de las coordenadas. Por supuesto, todos los puntos de la forma kB, siendo k un número cualquiera, también pertenecen a $\mathscr{L}$*). Pero, en dicho caso, sea cual sea el punto $P \in \mathscr{K}$ (y un punto así forzosamente existe, puesto que el sistema es compatible y, por lo tanto, la región $\mathscr{K}$ no está vacía), el conjunto de todos los puntos de la forma $P + kB$ (siendo k un número cualquiera), según el lema 1, pertenece a $\mathscr{K}$. Este conjunto, como es sabido, es una línea recta. Entonces, en el caso, cuando el sistema no es normal, la región $\mathscr{K}$ contiene una recta. Con esto queda demostrada, por completo, la afirmación subrayada anteriormente.

A continuación examinaremos la región de soluciones del

---

*) Si los números x, y, z, siendo coordenadas del punto B, satisfacen a un sistema homogéneo de ecuaciones, entonces los números kx, ky, kz, siendo coordenadas del punto kB, también satisfacen este sistema.

sistema (1) suponiendo que este sistema es compatible (la región $\mathcal{K}$ no está vacía) y normal.

Ante todo, partiendo del hecho que la región $\mathcal{K}$ no tiene rectas, deducimos que esta región, tiene vértices obligatoriamente. Al concepto de vértice le damos el siguiente sentido (cercano a la interpretación intuitiva de "vértice").

Vértice de la región $\mathcal{K}$ se llama el punto de esta región que no es punto interno con respecto a ningún segmento situado totalmente en $\mathcal{K}$. En otras palabras, vértice es un punto $A \in \mathcal{K}$ el cual es origen o extremo de cualquier segmento, perteneciente a $\mathcal{K}$, que pasa por A (fig. 33, a y b, siendo el punto A uno de los vértices; en la fig. 33, b la región $\mathcal{K}$ es un segmento).

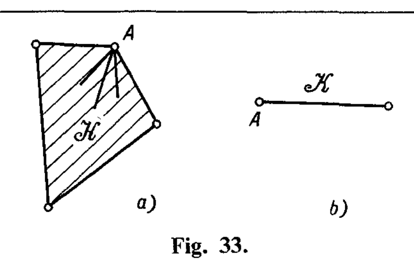


Fig. 33.

Explicaremos con más detalle por qué la región convexa $\mathcal{K}$ tiene vértices. Si $\mathcal{K}$ yace en una recta, entonces es un punto, un segmento o bien un rayo y el contenido en ella de vértices es evidente. Veamos los contornos de $\mathcal{K}$, cuando esta región no yace en una recta. En este caso, $\mathcal{K}$ está compuesta por segmentos y rayos (rectas completas $\mathcal{K}$ no contiene). Es evidente que el extremo de cualquiera de estos segmentos y el origen de cualquier rayo serán los vértices de $\mathcal{K}$.

La determinación de los vértices de la región $\mathcal{K}$ no representa gran dificultad. Ante todo observaremos que la i-ésima desigualdad del sistema (1) en el plano de coordenadas xOy corresponde a un semiplano, cuya recta confín l_i se determina por la ecuación

$$a_i x + b_i y + c_i = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Por lo visto el punto A de la región $\mathcal{K}$ es vértice en aquel, y sólo en aquel caso cuando pertenece a dos rectas confines *diferentes.*

Acordaremos llamar *regular* cualquier subsistema de dos ecua-

ciones del sistema

$$\left.\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1 &= 0, \\ a_2x + b_2y + c_2 &= 0, \\ \dots\dots\dots \\ a_mx + b_my + c_m &= 0, \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

con la condición que este subsistema tenga solamente una solución (x, y).

Por la característica dada anteriormente a los vértices se deduce el siguiente procedimiento para hallar los vértices de la región $\mathcal{K}$.

Para hallar *todos los vértices, es preciso hallar la solución de todos los subsistemas regulares del sistema* (6) *y elegir aquellas soluciones que satisfacen el sistema inicial* (1).

Como quiera que el número de subsistemas regulares no supera C_m^2 (número de combinaciones de orden 2 de m elementos), entonces el número de vértices de la región $\mathcal{K}$ tampoco puede ser superior. O sea, *el número de vértices es finito.*

OBSERVACIÓN. De lo dicho anteriormente se deduce que si la región $\mathcal{K}$ de soluciones de un sistema normal no tiene ni un sólo vértice, entonces esta región está vacía y el sistema no tiene soluciones (es incompatible).

EJEMPLO 1. Hallar todos los vértices de la región $\mathcal{K}$, determinada por el sistema de desigualdades

$$\left.\begin{aligned} x + y + 1 &\geqslant 0, \\ x - 2y - 2 &\geqslant 0, \\ 2x - y - 4 &\geqslant 0. \end{aligned}\right\}$$

Resolviendo los subsistemas

$$\left.\begin{aligned} x + y + 1 &= 0, \\ x - 2y - 2 &= 0, \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} x + y + 1 &= 0, \\ 2x - y - 4 &= 0, \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} x - 2y - 2 &= 0, \\ 2x - y - 4 &= 0, \end{aligned}\right\}$$

(todos ellos resultan regulares), hallamos tres puntos:

$$(0, -1), \quad (1, -2), \quad (2, 0),$$

de los cuales sólo el segundo y tercero satisfacen a todas las desigualdades dadas. Entonces, vértices de la región $\mathcal{K}$ son los puntos

$$A_1(1, -2) \quad \text{y} \quad A_2(2, 0).$$

Volvamos al sistema (1). Sean

$$A_1, A_2, \ldots, A_p,$$

todos los vértices de la región $\mathscr{K}$. El conjunto $\langle A_1, A_2, \ldots, A_p\rangle$ es cápsula convexa del sistema de puntos $A_1, A_2, \ldots, A_p$ que también pertenece a $\mathscr{K}$, puesto que $\mathscr{K}$ es cápsula convexa. Pero entonces, según el lema 1, también el conjunto

$$\langle A_1, A_2, \ldots, A_p\rangle + \mathscr{K}_0$$

pertenece a $\mathscr{K}$. Demostraremos que esta suma, de hecho, coincide con $\mathscr{K}$, es decir, que es válido el siguiente.

TEOREMA. *Si un sistema de desigualdades es normal, entonces*

$$\mathscr{K} = \langle A_1, A_2, \ldots, A_p\rangle + \mathscr{K}_0, \qquad (7)$$

siendo $A_1, A_2, \ldots, A_p$ *todos los vértices de la región* $\mathscr{K}$.

DEMOSTRACIÓN. Sea P un punto arbitrario de la región $\mathscr{K}$ diferente de los vértices de esta región. La recta A_1P corta la región convexa $\mathscr{K}$, o bien por un segmento A_1A (fig. 34), o bien por

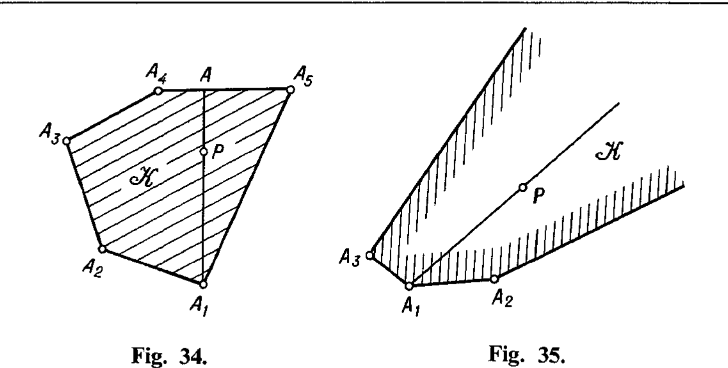


Fig. 34. **Fig. 35.**

un rayo, cuyo origen es A_1 (fig. 35). En el segundo caso $P - A_1 \in \mathscr{K}_0$ (lema 2), por lo tanto $P \in A_1 + \mathscr{K}_0$. En el primer caso reflexionamos así: si el punto A yace en la arista limitada A_iA_j de la región $\mathscr{K}$ (como en la fig. 34), entonces P pertenece a la cápsula convexa de puntos A_1, A_i, A_j; si es que el punto A yace en la arista ilimitada con origen en el vértice A_i (fig. 36), entonces, según el lema 1, tenemos que $A \in A_i + \mathscr{K}_0$, y por lo tanto $P \in \langle A_1, A_i\rangle + \mathscr{K}_0$. Así, pues, en todos los casos el punto P

resulta perteneciente al conjunto $\langle A_1, A_2, \ldots, A_p\rangle + \mathcal{K}_0$. El teorema queda demostrado.

Puesto que el procedimiento de hallar los vértices nos es ya conocido, para una descripción completa de la región $\mathcal{K}$ queda solamente por saber cómo hallar la región $\mathcal{K}_0$. Esta última representa una región de soluciones del sistema normal y homogéneo (2). Pasemos a su descripción.

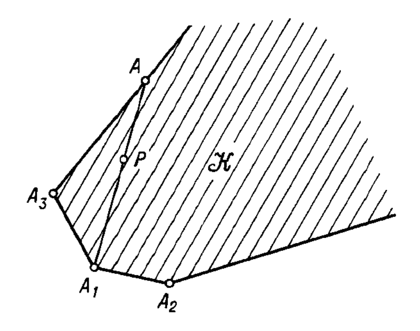


Fig. 36.

3°. *Sistema de desigualdades normal y homogéneo* (2). Cada una de las desigualdades (2) determina un semiplano, cuya recta confín pasa por el origen de las coordenadas. La parte común de estos semiplanos es $\mathcal{K}_0$.

En este caso, entre las rectas confines hay por lo menos dos diferentes [¡el sistema (2) es normal!]. Por consiguiente, $\mathcal{K}_0$, o bien coincide con el origen de las coordenadas ($x = 0$, $y = 0$), o es un rayo con su vértice en el origen de las coordenadas, o bien representa cierto ángulo, menor que 180°, con el vértice en el origen de las coordenadas. Conociendo dos puntos B_1 y B_2, yacientes en distintos lados de este ángulo (fig. 37), todos los demás puntos de dicho ángulo se expresan de la forma

$$B = t_1B_1 + t_2B_2, \tag{8}$$

siendo t_1 y t_2 números arbitrarios no negativos. Hallar los puntos B_1 y B_2 no es difícil, si se tiene en cuenta que cada uno de ellos: a) pertenece a $\mathcal{K}_0$, es decir, satisface el sistema (2), y b) yace en el contorno de $\mathcal{K}_0$, es decir, satisface a una de las ecuaciones (3). Si $\mathcal{K}_0$ es un rayo, entonces en lugar de (8)

tenemos

$$B = tB_1, \tag{9}$$

siendo B_1 cualquier punto de este rayo (diferente de su origen) y t un número arbitrario no negativo.

EJEMPLO 2. Hallar la región $\mathscr{K}_0$ de soluciones del sistema

$$\left.\begin{aligned} x + y &\geqslant 0, \\ x - 2y &\geqslant 0, \\ 2x - y &\geqslant 0, \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

y también la región $\mathscr{K}$ de soluciones del sistema dado en el ejemplo 1.

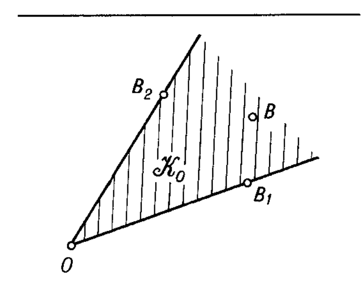


Fig. 37.

RESOLUCIÓN. El sistema (10) es normal: la única solución del sistema homogéneo de ecuaciones correspondiente

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 0, \\ x - 2y &= 0, \\ 2x - y &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

es (0, 0).

Elijamos un punto cualquiera que satisfaga la primera de las ecuaciones (11) [pero diferente de (0, 0)], por ejemplo, el punto $C(-1, 1)$. Una simple comprobación nos convence de que el punto C satisface no todas las desigualdades (10), por consiguiente, ni este, ni otro punto cualquiera del rayo OC (diferente del origen O) pertenece a $\mathscr{K}_0$. Examinando el punto $-C$, [es decir, el punto $(1, -1)$] hallamos que éste pertenece a $\mathscr{K}_0$. O sea,

$B_1 = (1, \ -1)$. El punto $(2, \ 1)$ satisface la segunda ecuación; este punto también es solución del sistema (10), por lo tanto $B_2 = (2, \ 1)$. La región $\mathscr{K}_0$ está compuesta por los puntos (fig. 38)

$$t_1 B_1 + t_2 B_2 = t_1 (1, \ -1) + t_2 (2, \ 1) = (t_1 + 2t_2, \ -t_1 + t_2),$$

siendo t_1 y t_2 números arbitrarios no negativos.

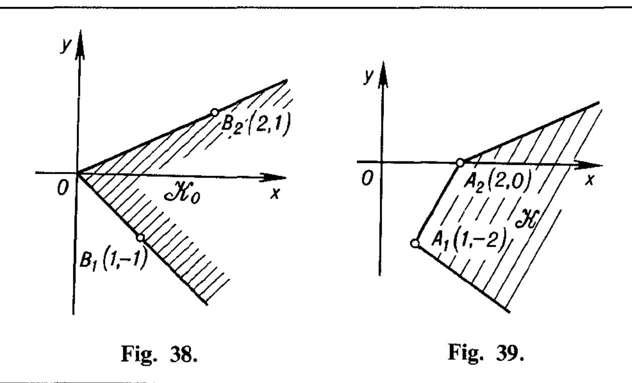


Fig. 38. Fig. 39.

Dirigiéndonos al sistema de desigualdades dado en el ejemplo 1, observamos que el sistema homogéneo de desigualdades correspondiente a él es, precisamente, (10). Por el teorema demostrado anteriormente, tenemos

$$\mathscr{K} = \langle A_1, \quad A_2 \rangle + \mathscr{K}_0,$$

donde $A_1 (1, \ -2)$ y $A_2 (2, \ 0)$ son vértices de la región $\mathscr{K}$. Así pues, $\mathscr{K}$ está formada por los puntos (fig. 39).

$$s(1, \ -2) + (1 - s)(2, \ 0) + (t_1 + 2t_2, \ -t_1 + t_2) =$$
$$= (2 - s + t_1 + 2t_2, \ -2s - t_1 + t_2),$$

siendo s cualquier número del intervalo $[0, \ 1]$ y t_1, t_2 cualesquiera números no negativos.

EJEMPLO 3. Hallar la región de soluciones del sistema

$$\left.\begin{aligned} 2x - y &\geqslant 0, \\ -4x + 2y &\geqslant 0, \\ x + y &\geqslant 0. \end{aligned}\right\}$$

Procediendo lo mismo que en el ejemplo 2, hallamos solamente

un rayo:

$$B = t(1,\ 2) = (t,\ 2t),\quad (t \geqslant 0),$$

(fig. 40).

EJEMPLO 4. Hallar la región de soluciones del sistema

$$\left.\begin{aligned} 2x - y &\geqslant 0, \\ x + y &\geqslant 0, \\ -3x + y &\geqslant 0. \end{aligned}\right\}$$

En este caso ninguna de las ecuaciones

$$\begin{aligned} 2x - y &= 0, \\ x + y &= 0, \\ -3x + y &= 0, \end{aligned}$$

tiene soluciones [excepto (0, 0)] que satisfagan todas las desigualdades dadas. La región $\mathscr{K}_0$ está compuesta por un punto (0, 0) que es el origen de las coordenadas.

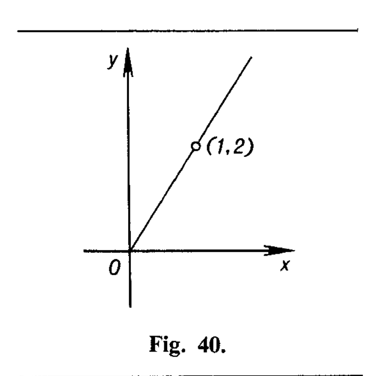


Fig. 40.

4°. *Caso cuando el sistema de desigualdades* (1) *no es normal.* Esto significa que la región de soluciones $\mathscr{L}$ del sistema homogéneo de ecuaciones (3), contiene no sólo el origen de las coordenadas. Por lo tanto, todas las ecuaciones (3) determinan en un plano una misma recta, y esta recta es $\mathscr{L}$.

Conforme al lema 1 la región $\mathscr{K}$ contiene, junto con cada uno de sus puntos P, la recta $P + \mathscr{L}$ (recta que pasa por P paralelamente a $\mathscr{L}$. Veamos cualquier recta $\mathscr{T}$ no paralela a $\mathscr{L}$. Cono-

ciendo que puntos de la recta $\mathscr{T}$ pertenecen a la región $\mathscr{K}$ (designaremos al conjunto de estos puntos por $\mathscr{K}_{\mathscr{T}}$), podemos hallar la propia región $\mathscr{K}$, puesto que entonces $\mathscr{K} = \mathscr{K}_{\mathscr{T}} + \mathscr{L}$ (fig. 41).

La ecuación de la recta $\mathscr{L}$ es $a_1x + b_1y = 0$. En esta ecuación uno de los coeficientes, a_1 o b_1 es diferente de cero; sea, por

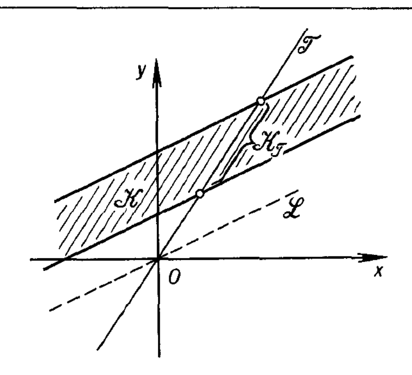


Fig. 41.

ejemplo, $b_1 \neq 0$. Entonces en calidad de recta $\mathscr{T}$, no paralela a $\mathscr{L}$, se puede tomar el eje y (su ecuación es $x = 0$). En este caso el conjunto $\mathscr{K}_{\mathscr{T}}$ (designémoslo ahora por $\mathscr{K}_y$) es parte del eje y situado dentro de $\mathscr{K}$. Para hallar este conjunto se debe considerar en el sistema (1) que $x = 0$. Entonces tendremos el sistema de desigualdades

$$\left.\begin{array}{l} b_1y + c_1 \geqslant 0, \\ b_2y + c_2 \geqslant 0, \\ \dots\dots \\ b_my + c_m \geqslant 0, \end{array}\right\} \qquad (12)$$

con una incógnita y, cuya resolución no presenta dificultad*).

*) Observaremos que el sistema (12), considerado como un sistema de desigualdades con una incógnita, será ya normal. Pues, de lo contrario, el sistema homogéneo correspondiente a él tendrá solución nula y^*, y entonces el sistema (3) tendrá solución $(0, y^*)$ no perteneciente a $\mathscr{L}$.

Observaremos que el conjunto $\mathcal{K}_y$ puede ser un conjunto vacío (entonces $\mathcal{K}$ también está vacío), un punto, un segmento o un rayo (pero no de todo el eje y, pues de lo contrario $\mathcal{K}$ es todo el plano, cosa imposible). Hallando este conjunto, determinamos la región $\mathcal{K}$, ya que

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}_y + \mathcal{L} \qquad (13)$$

(si $\mathcal{L}$ no es paralela al eje y).

EJEMPLO 5. Hallar la región $\mathcal{K}$ de soluciones del sistema

$$\left.\begin{aligned} x + y - 1 &\geqslant 0, \\ -x - y + 2 &\geqslant 0, \\ 2x + 2y + 3 &\geqslant 0. \end{aligned}\right\}$$

Es fácil ver que este sistema no es normal y que $\mathcal{L}$ es una recta

$$x + y = 0,$$

(no paralela al eje y) suponiendo que $x = 0$, obtenemos el sistema

$$\left.\begin{aligned} y - 1 &\geqslant 0, \\ -y + 2 &\geqslant 0, \\ 2y + 3 &\geqslant 0, \end{aligned}\right\}$$

por el cual se ve que $\mathcal{K}_y$, intersección de $\mathcal{K}$ con el eje y, es un segmento con los extremos $C_1(0, 1)$ y $C_2(0, 2)$. Es decir, $\mathcal{K}$ es un conjunto de puntos de la forma (fig. 42)

$$(0, y) + (x, -x) = (x, y - x),$$

siendo x número arbitrario, e y cualquier número en el intervalo de 1 a 2.

Para finalizar nos detendremos brevemente en un teorema, el cual se deriva de los resultados obtenidos anteriormente. En el caso bidimensional que analizamos ahora (es decir, cuando todo transcurre en un plano) este teorema no causa gran impresión, y lo más justo sería considerarlo como punto de partida para generalizar en el caso "n-dimensional". Este último se analiza en el párrafo 7.

TEOREMA. *Cualquier (no vacía) región poligonal convexa $\mathcal{K}$ en un plano puede ser representada en forma de suma*

$$\langle A_1, A_2, \ldots, A_p \rangle + (B_1, B_2, \ldots, B_q). \qquad (14)$$

El primer sumando de esta suma es una cápsula convexa de cierto sistema de puntos $A_1, A_2, \ldots, A_p$; el segundo, un conjunto de puntos de la forma $t_1B_1 + t_2B_2 + \ldots + t_qB_q$, siendo $t_1, t_2, \ldots, t_q$ números arbitrarios no negativos.

La demostración de este teorema puede darse en unas palabras. Veamos el sistema de desigualdades que determina a $\mathcal{K}$. Si este sistema es normal, se cumple la ecuación (7); teniendo en cuenta que, en esta ecuación, $\mathcal{K}_0$ es uno de los conjuntos de la forma (B_1, B_2), (B_1) o (O) (origen de coordenadas), hallamos que, en el caso cuando el sistema es normal, nuestra afirmación es válida. Cuando el sistema no es normal, se cumple la ecuación (13) de la cual también se deduce la determinación de $\mathcal{K}$ en la forma necesaria (¿por qué?).

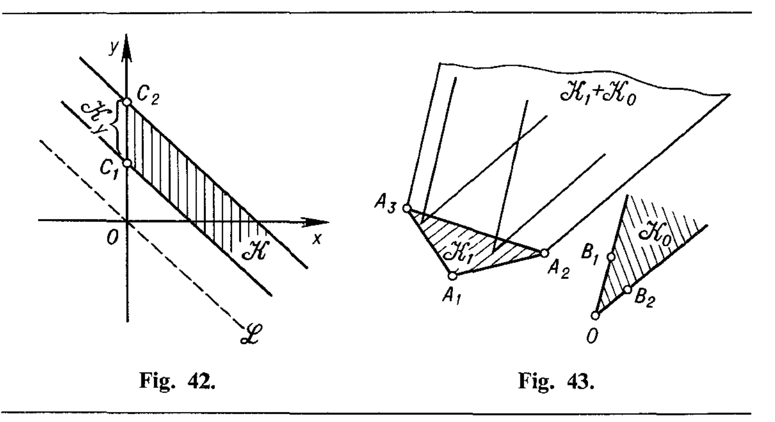


Fig. 42. Fig. 43.

Observaremos, que si todos los puntos $A_1, A_2, \ldots, A_p$ coinciden con el origen de las coordenadas O, entonces también el conjunto $\langle A_1, A_2, \ldots, A_p\rangle$ coincide con O. En este caso, de la suma (14) quedará solamente el segundo sumando. En el caso cuando los puntos $B_1, B_2, \ldots$ $\ldots, B_q$ coinciden con O, el conjunto $(B_1, B_2, \ldots, B_q)$ también coincide con O y de la suma (14) quedará solamente el primer sumando.

El teorema recíproco también se cumple, si bien, con cierta objeción.

TEOREMA. *Cualquier conjunto de la forma*

$$\langle A_1, A_2, \ldots, A_p\rangle + (B_1, B_2, \ldots, B_q),$$

en un plano, es todo el plano, o bien cierta región poligonal convexa en dicho plano.

La demostración es lo suficiente evidente. El segundo sumando, es decir, la región $\mathcal{K}_0 = (B_1, B_2, \ldots, B_q)$ es bien todo el plano, bien un semiplano, un ángulo (menor que 180°), un rayo, o un punto (origen de las coordenadas). El primer sumando $\mathcal{K}_1 = \langle A_1, A_2, \ldots, A_p\rangle$ representa cierto polígono convexo. El conjunto $\mathcal{K}_1 + \mathcal{K}_0$ puede obtenerse mediante traslaciones paralelas de $\mathcal{K}_0$ a los segmentos OK_1 (siendo K_1

cualquier punto de $\mathscr{K}_1$) y tomando la unión de los conjuntos obtenidos (fig. 43). No es difícil comprobar que, de tal forma, se obtiene todo el plano (así será siendo $\mathscr{K}_0$ todo el plano), o bien cierta región poligonal convexa en dicho plano.

§ 6. REGIÓN DE SOLUCIONES DE UN SISTEMA CON TRES INCÓGNITAS

Después de un minucioso análisis, dado en el párrafo anterior, al analizar ahora sistemas con tres incógnitas, podemos reducir al mínimo la teoría indispensable.

Junto con el sistema inicial

$$\left.\begin{array}{l} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 \geqslant 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_mx + b_my + c_mz + d_m \geqslant 0, \end{array}\right\} \tag{1}$$

de nuevo, lo mismo que en el párrafo 5, examinaremos dos sistemas:

$$\left.\begin{array}{l} a_1x + b_1y + c_1z \geqslant 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_mx + b_my + c_mz \geqslant 0 \end{array}\right\} \tag{2}$$

y

$$\left.\begin{array}{l} a_1x + b_1y + c_1z = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_mx + b_my + c_mz = 0 \end{array}\right\} \tag{3}$$

Designaremos nuevamente la región de soluciones del sistema (1) por $\mathscr{K}$, la del sistema (2), por $\mathscr{K}_0$ y la del sistema (3), por $\mathscr{L}$. Utilizando la terminología acordada anteriormente, se puede decir que $\mathscr{K}$ representa cierta región poliédrica convexa en el espacio y $\mathscr{K}_0$, un cono poliedro convexo. Los lemas 1 y 2 del párrafo 5, como ya indicábamos, conservan su validez también aquí.

1°. Caso en que el sistema de desigualdades (1) es normal. En este caso la región $\mathscr{K}$ no contiene rectas y, por lo tanto, tiene, por lo menos, un vértice. Efectivamente, si $\mathscr{K}$ yace en un plano (cosa posible conforme se indica en el párrafo 2), entonces

$\mathscr{K}$ es una región poligonal convexa sin rectas situada en dicho plano y, por eso, conforme se explica en el reparto 2° del párrafo 5, obligatoriamente tiene que tener vértices. Veamos los contornos de la región $\mathscr{K}$ cuando ésta no yace en un plano. Dichos contornos están formados por caras planas, cada una de las cuales, siendo región poligonal convexa que no contiene rectas, tiene que tener vértice. Ahora bien, no es difícil ver que el vértice de cualquier cara es, al mismo tiempo, vértice de la región $\mathscr{K}$.

En cada vértice A de la región $\mathscr{K}$ convergen, por lo menos, tres planos confines, para los cuales el punto A es *el único* punto común. En efecto, de no ser así, todos los planos confines que pasan por A tendrán que coindicir o tener una recta común. Pero entonces un segmento lo suficientemente pequeño, que esté situado en el plano común confín o en la recta común confín, pertenecerá a $\mathscr{K}$, lo que contradice a la definición del vértice.

Lo acabado de exponer nos obliga a inscribir modificaciones evidentes en el procedimiento de hallazgo de los vértices, descrito en el punto 2° del párrafo 5. A saber, *subsistema regular* ahora deberemos llamar, no al subsistema de dos, sino *de tres* ecuaciones del sistema siguiente.

$$\left.\begin{array}{l} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0, \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_mx + b_my + c_mz + d_m = 0, \end{array}\right\} \qquad (4)$$

con la condición de que la solución (x, y, z) de este subsistema es única. Siendo ésta la interpretación de subsistema regular, el procedimiento para hallar los vértices se conserva exactamente el mismo que antes, concretamente:

Para hallar todos los vértices de la región $\mathscr{K}$ es preciso hallar las soluciones de todos los subsistemas regulares del sistema (4) *y elegir aquellas soluciones que satisfacen el sistema inicial* (1).

También conserva su fuerza el teorema tratado en el punto 2° del párrafo 5; las modificaciones que se deben introducir en la demostración de dicho teorema, son evidentes. Conserva su validez también la observación de que un sistema normal no tiene soluciones cuando la región $\mathscr{K}$ no posee vértices.

EJEMPLO 1. Hallar los vértices de la región $\mathscr{K}$, determinada por el sistema de desigualdades

$$\left.\begin{aligned} 2x+y+z-1 &\geqslant 0,\\ x+2y+z-1 &\geqslant 0,\\ x+y+2z-1 &\geqslant 0,\\ x+y+z-1 &\geqslant 0. \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

En este caso el correspondiente sistema homogéneo de ecuaciones tiene la forma

$$\left.\begin{aligned} 2x+y+z &= 0,\\ x+2y+z &= 0,\\ x+y+2z &= 0,\\ x+y+z &= 0. \end{aligned}\right\}$$

Resolviendo este sistema, hallamos que la única solución es (0, 0, 0); el sistema (5) es normal.

Para hallar los vértices tendremos que examinar todos los posibles subsistemas de tres ecuaciones del sistema (4);

$$\left.\begin{aligned} 2x+y+z-1 &= 0,\\ x+2y+z-1 &= 0,\\ x+y+2z-1 &= 0; \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} 2x+y+z-1 &= 0,\\ x+2y+z-1 &= 0,\\ x+y+z-1 &= 0; \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} 2x+y+z-1 &= 0,\\ x+y+2z-1 &= 0,\\ x+y+z-1 &= 0; \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} x+2y+z-1 &= 0,\\ x+y+2z-1 &= 0,\\ x+y+z-1 &= 0. \end{aligned}\right\}$$

Realizando los cálculos necesarios, hallamos que todos los subsistemas son regulares y que sus soluciones son los puntos

$$\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right), \quad (0, 0, 1), \quad (0, 1, 0), \quad (1, 0, 0),$$

entre las cuales, la primera no satisface el sistema (5), mientras que las tres restantes sí lo satisfacen. Por lo tanto, vértices de la región $\mathscr{K}$ son:

$$A_1(1, 0, 0), \quad A_2(0, 1, 0), \quad A_3(0, 0, 1).$$

2°. *Sistema normal y homogéneo de desigualdades* (2). Cada una de las desigualdades (2) determina un semiespacio, cuyo plano confín o límite pasa por el origen de las coordenadas.

En este caso la intersección de los planos confines es un único punto, el origen de las coordenadas [¡el sistema (2) es normal!].

En otros términos, el conjunto $\mathscr{K}_0$, siendo región de soluciones del sistema (2), representa un cono poliedro convexo con un *único* vértice. Por la enumeración de conos poliedros convexos dada en el párrafo 4, se deduce que, en nuestro caso, $\mathscr{K}_0$ es o una pirámide convexa ilimitada o bien un ángulo plano, un rayo o, finalmente, un punto (origen de las coordenadas). Este último caso lo dejaremos de momento a un lado. En todos los demás casos tendremos:

$$\mathscr{K}_0 = (B_1, B_2, \ldots, B_q),$$

siendo $B_1, B_2, \ldots, B_q$ cualesquiera puntos – uno por cada arista – del cono $\mathscr{K}_0$ (véase el teorema 2, párrafo 4). Estos puntos se pueden hallar partiendo de las siguientes condiciones. Cada uno de ellos: a) pertenece a $\mathscr{K}_0$, es decir, satisface el sistema (2) y b) pertenece a la línea de intersección de dos caras distintas, es decir, satisface dos ecuaciones no proporcionales*) del sistema (3).

Si resulta que el único punto que satisface las condiciones a) y b) es (0, 0, 0), entonces la región $\mathscr{K}_0$ coincide con el origen de las coordenadas.

EJEMPLO 2. Hallar la región $\mathscr{K}_0$ de soluciones del sistema

$$\left.\begin{aligned} 2x + y + z &\geqslant 0,\\ x + 2y + z &\geqslant 0,\\ x + y + 2z &\geqslant 0,\\ x + y + z &\geqslant 0, \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

y, a continuación, la región $\mathscr{K}$ de soluciones del sistema dado en el ejemplo 1.

Observaremos, ante todo, que el sistema (6) está relacionado con el sistema de desigualdades (5), dado en el ejemplo 1; a saber, (6) es sistema homogéneo correspondiente a (5). Por lo tanto, el sistema (6) es normal.

En dicho caso, un sistema de dos ecuaciones no proporcionales se puede componer por seis modos distintos:

$$\left.\begin{aligned} x + 2y + z &= 0,\\ x + y + 2z &= 0; \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} 2x + y + z &= 0,\\ x + y + 2z &= 0; \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} 2x + y + z &= 0,\\ x + y + z &= 0; \end{aligned}\right\}$$

*) Las ecuaciones $ax + by + cz = 0$ y $a'x + b'y + c'z = 0$ se llaman "no proporcionales", si no se cumple tan sólo una de las igualdades $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$; en este caso los planos respectivos se cortan por una recta.

$$\left.\begin{aligned} 2x + y + z = 0, \\ x + 2y + z = 0; \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} x + 2y + z = 0, \\ x + y + z = 0; \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} x + y + 2z = 0, \\ x + y + z = 0. \end{aligned}\right\}$$

Para cada uno de estos seis sistemas elegimos dos soluciones no nulas: (x, y, z) y $(-x, -y, -z)$. Por ejemplo, para el primer sistema se puede tomar $(3, -1, -1)$ y $(-3, 1, 1)$; las desigualdades (6) satisfacen únicamente la primera de estas soluciones. De aquí obtenemos el punto $B_1 = (3, -1, -1)$. Procediendo lo mismo con los otros cinco sistemas, hallamos los puntos $B_2 = (-1, 3, -1)$ y $B_3 = (-1, -1, 3)$. O sea, la región $\mathscr{K}_0$ está compuesta por los puntos de la forma

$$t_1B_1 + t_2B_2 + t_3B_3 = \\ = (3t_1 - t_2 - t_3, -t_1 + 3t_2 - t_3, -t_1 - t_2 + 3t_3),$$

siendo t_1, t_2, t_3 números arbitrarios no negativos.

Veamos ahora el sistema de desigualdades (5) del ejemplo 1. El sistema homogéneo correspondiente a él, como ya indicábamos, es precisamente (6). Por consiguiente, la región $\mathscr{K}$ tiene la forma

$$\langle A_1, A_2, A_3 \rangle + \mathscr{K}_0,$$

y está compuesta por los puntos

$$s_1A_1 + s_2A_2 + s_3A_3 + t_1B_1 + t_2B_2 + t_3B_3 = \\ = s_1(1, 0, 0) + s_2(0, 1, 0) + s_3(0, 0, 1) + t_1(3, -1, -1) + \\ + t_2(-1, 3, -1) + t_3(-1, -1, 3) = (s_1 + 3t_1 - t_2 - t_3, \\ s_2 - t_1 + 3t_2 - t_3, s_3 - t_1 - t_2 + 3t_3),$$

donde t_1, t_2, t_3 son números arbitrarios no negativos y s_1, s_2, s_3, números no negativos, cuya suma es igual a 1.

3°. *Caso en que el sistema de desigualdades* (1) *no es normal.* Esto significa que la región de soluciones $\mathscr{L}$ del sistema homogéneo de ecuaciones (3), contiene puntos diferentes del origen de las coordenadas. Como $\mathscr{L}$ se presenta como una intersección de planos, entonces son posibles dos casos:

1. $\mathscr{L}$ es una recta. Conforme al lema 1, la región $\mathscr{K}$ junto con cada uno de sus puntos P, contiene la recta $P + \mathscr{L}$. Examinemos cualquier plano $\mathscr{T}$ no paralelo a $\mathscr{L}$. Conociendo qué puntos del plano $\mathscr{T}$ pertenecen a la región $\mathscr{K}$ (designamos al conjunto de dichos puntos por $\mathscr{K}_{\mathscr{T}}$), se puede hallar la propia región $\mathscr{K}$, ya que entonces $\mathscr{K} = \mathscr{K}_{\mathscr{T}} + \mathscr{L}$.

Pero sea cual sea la recta $\mathscr{L}$, en calidad de plano $\mathscr{T}$ no paralelo a ella,. siempre puede eligirse uno de los planos de coordenadas xOy, xOz o yOz. Supongamos, por ejemplo, que $\mathscr{L}$ no es paralela al plano yOz. Tomamos este plano por $\mathscr{T}$. En este caso el conjunto $\mathscr{K}_{\mathscr{T}}$ (designémoslo ahora por $\mathscr{K}_{y,z}$) es una parte del plano yOz, incluida en $\mathscr{K}$ (fig. 44). Para hallar este conjunto debemos considerar en el sistema (1), $x = 0$. Entonces obtenemos el sistema de desigualdades*)

$$\left.\begin{array}{c} b_1 y + c_1 z + d_1 \geqslant 0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ b_m y + c_m z + d_m \geqslant 0, \end{array}\right\} \qquad (7)$$

el cual puede resolverse por el procedimiento expuesto en el párrafo 5.

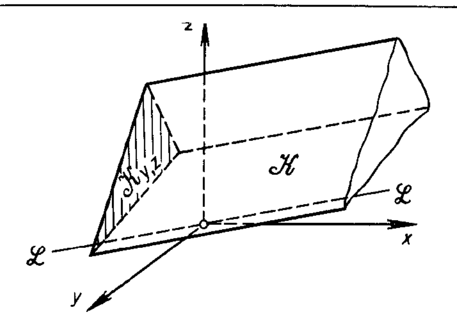


Fig. 44.

Una vez hallado el conjunto $\mathscr{K}_{y,z}$, podemos escribir

$$\mathscr{K} = \mathscr{K}_{y,z} + \mathscr{L} \qquad (8)$$

(si la recta $\mathscr{L}$ no es paralela al plano yOz), lo que da una descripción completa de la región $\mathscr{K}$.

Observación. Si resulta que el conjunto $\mathscr{K}_{y,z}$ está vacío, entonces también $\mathscr{K}$ está vacía. Esto significa que el sistema (1) es incompatible.

*) El sistema (7), como no es difícil ver, será ya normal (véase la nota análoga en la pág. 48).

EJEMPLO 3. Hallar la región $\mathcal{K}$ de soluciones del sistema

$$\left.\begin{aligned} -2x + y + z - 1 &\geqslant 0, \\ -3x - y + 4z - 1 &\geqslant 0, \\ -x - 2y + 3z &\geqslant 0. \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

Veamos el correspondiente sistema homogéneo de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} -2x + y + z &= 0, \\ -3x - y - 4z &= 0, \\ -x - 2y + 3z &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

Resolviendo este sistema hallamos que la tercer ecuación es consecuencia de las dos primeras, o sea el sistema se reduce a las dos primeras ecuaciones. El conjunto $\mathcal{L}$ de soluciones de este sistema es una recta, por la cual se cortan los planos

$$-2x + y + z = 0,$$

y

$$-3x - y + 4z = 0.$$

Elijamos un punto cualquiera B en la recta $\mathcal{L}$ diferente del origen de las coordenadas. Para ello, basta con hallar tres números cualesquiera x, y, z (no iguales a cero al mismo tiempo), que satisfagan las dos primeras ecuaciones del sistema (10). Tomamos, por ejemplo, 1, 1, 1. 0 sea, $\mathcal{L}$ es una recta OB en la que $B =$ $= (1, 1, 1)$.

Es fácil ver que la recta $\mathcal{L}$ no es paralela, por ejemplo, al plano de coordenadas yOz. Suponiendo en el sistema (9) $x = 0$, obtenemos el sistema normal

$$\left.\begin{aligned} y + z - 1 &\geqslant 0, \\ -y + 4z - 1 &\geqslant 0, \\ -2y + 3z &\geqslant 0, \end{aligned}\right\}$$

con dos incógnitas y y z. La región de sus soluciones $\mathcal{K}_{y,z}$ se puede hallar por el procedimiento expuesto en el párrafo 5. Realizando los cálculos precisos, hallamos que $\mathcal{K}_{y,z}$ es un conjunto compuesto por un punto $A\left(\frac{3}{5}, \frac{2}{5}\right)$ (en el plano yOz). Por lo tanto, la región buscada $\mathcal{K}$ está compuesta por todos los puntos

de la forma

$$A + tB = \left(0, \frac{3}{5}, \frac{2}{5}\right) + t(1, 1, 1) = \left(t, \frac{3}{5} + t, \frac{2}{5} + t\right),$$

siendo t cualquier número no negativo (la región $\mathscr{K}$ es una recta paralela a $\mathscr{L}$.

2. $\mathscr{L}$ es un plano. Entonces en calidad de conjunto secante $\mathscr{T}$ tomamos cualquier recta no paralela a este plano; por ejemplo, se puede tomar uno de los ejes de coordenadas. Supongamos que el eje z no es paralelo a $\mathscr{L}$; tomámoslo por $\mathscr{T}$. Para hallar el conjunto $\mathscr{K}_z$, parte del eje z, incluido en $\mathscr{K}$, debemos considerar en el sistema (1), $x = 0$ e $y = 0$. Entonces obtenemos el sistema de desigualdades

$$\left.\begin{array}{l} c_1 z + d_1 \geqslant 0, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ c_m z + d_m \geqslant 0, \end{array}\right\} \qquad (11)$$

que se resuelve sin gran trabajo*). Después de hallar el conjunto $\mathscr{K}_z$, podemos escribir (fig. 45)

$$\mathscr{K} = \mathscr{K}_z + \mathscr{L}, \qquad (12)$$

(si el plano $\mathscr{L}$ no es paralelo al eje z), lo que da una descripción completa de $\mathscr{K}$.

OBSERVACIÓN. Si el conjunto $\mathscr{K}_z$ resulta vacío, entonces $\mathscr{K}$ también está vacío. En este caso, el sistema (1) es incompatible.

EJEMPLO 4. Hallar la región $\mathscr{K}$ de soluciones del sistema

$$\left.\begin{array}{r} x - y + z + 1 \geqslant 0, \\ -x + y - z + 2 \geqslant 0. \end{array}\right\} \qquad (13)$$

En el caso dado, el respectivo sistema homogéneo de ecuaciones tiene la forma

$$\left.\begin{array}{r} x - y + z = 0, \\ -x + y - z = 0. \end{array}\right\} \qquad (14)$$

Aquí la segunda ecuación es consecuencia de la primera, por eso, la región de soluciones del sistema (14) es el plano $\mathscr{L}$, determinado por la ecuación

$$x - y + z = 0.$$

*) El sistema (11) es normal.

Es fácil ver que este plano corta el eje z solamente en un punto y, por lo tanto, no es paralelo al eje z. Hallemos el conjunto $\mathcal{K}_z$.

Suponiendo en el sistema (13) $x = 0$ e $y = 0$, obtenemos el sistema

$$\left.\begin{aligned} z + 1 &\geqslant 0, \\ -z + 2 &\geqslant 0, \end{aligned}\right\}$$

del cual se deduce que

$$-1 \leqslant z \leqslant 2. \tag{15}$$

Así pues, $\mathcal{K}$ es el conjunto $\mathcal{K}_z + \mathcal{L}$, compuesto por puntos de la forma $(0, 0, z) + (x, y, -x + y) = (x, y, z - x + y)$, donde x e y son números arbitrarios y z satisface las desigualdades (15).

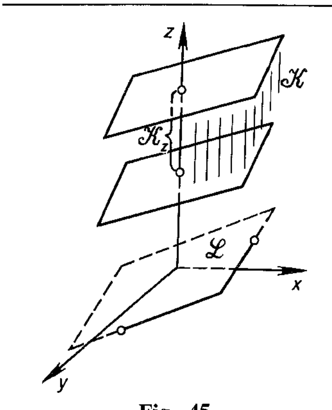


Fig. 45.

Para finalizar este párrafo, formularemos dos teoremas que son la generalización de los dos últimos teoremas dados en el párrafo 5 para el caso tridimensional. Para ello, la única modificación precisa en la fórmulación de los teoremas mencionados del párrafo 5 consiste en sustituir la palabra "plano" por "espacio".

TEOREMA. *Cualquier región poliédrica convexa (no vacía) en el espacio puede ser representada en forma de suma*

$$\langle A_1, A_2, \ldots, A_p\rangle + (B_1, B_2, \ldots, B_q).$$

TEOREMA. *Cualquier conjunto de la forma*

$$\langle A_1, A_2, \ldots, A_p\rangle + (B_1, B_2, \ldots, B_q)$$

en el espacio es o todo el espacio, o bien cierta región convexa y poliédrica en él.

Las demostraciones de estos dos teoremas son casi idénticas a las demostraciones de los respectivos teoremas para caso bidimensional. Concedemos al lector la realización detallada de estas demostraciones.

§ 7. SISTEMAS DE DESIGUALDADES LINEALES CON CUALQUIER NÚMERO DE INCÓGNITAS

En los párrafos anteriores hemos concentrado nuestra atención en los sistemas de desigualdades *con dos o tres incógnitas.* Esto principalmente es debido a dos circunstancias: en primer lugar, por el hecho de que la investigación de estos sistemas no es complicada y está totalmente dentro de los márgenes de las matemáticas "escolares"; en segundo (en este caso es un hecho más importante), porque las soluciones de estos sistemas tienen un sentido geométrico evidente (puntos en un plano o en el espacio). No obstante, tienen mayor aplicación (por ejemplo, en cuestiones de programación lineal) sistemas de desigualdades con un número de incógnitas $n > 3$. Pasarlas de largo sería empobrecer considerablemente la exposición del tema. Por eso, procuraremos aunque sea en forma breve, dar algunas explicaciones para cuallquier caso cuando $n > 3$.

Para dar una interpretación geométrica a los sistemas de desigualdades lineales con n incógnitas es preciso referirse al llamado espacio *n-dimensional.*

Comenzaremos por dar una definición a los respectivos conceptos, si bien limitándonos a lo más indispensable.

Conforme a la definición, *un punto en un espacio n-dimensional* está determinado por el conjunto ordenado de n números

$$x_1, x_2, \ldots, x_n,$$

llamados coordenadas de dicho punto. El motivo para semejante definición radica en un hecho fundamental de la geometría analítica, conforme al cual, un punto en un plano se caracteriza por dos números, mientras que en el espacio, por tres. En lo sucesivo en lugar de la frase "el punto M tiene las coordenadas $x_1, x_2, \ldots$ $\ldots, x_n$", nos limitaremos a la expresión $M = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ o simplemente $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. El punto $(0, 0, \ldots, 0)$ se llama *origen de las coordenadas,* o simplemente *origen.*

En primer lugar, explicaremos qué se comprende por "segmento" en un espacio n-dimensional. Según el párrafo 1, en un espacio ordinario, el segmento M_1M_2 puede ser caracterizado como conjunto de todos los puntos de la forma

$$s_1M_1 + s_2M_2,$$

donde s_1 y s_2 son dos números no negativos cualesquiera, cuya suma es igual a 1. Pasando del espacio tridimensional al espacio n-dimensional, admitimos dicha característica por *definición de segmento.* Más exacto, sean

$$M'(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n) \quad \text{y} \quad M''(x''_1, x''_2, \ldots, x''_n),$$

dos puntos arbitrarios en un espacio n-dimensional. Entonces el segmento $M'M''$ se llama *conjunto de todos los puntos de la forma*

$$s'M' + s''M'' = (s'x'_1 + s''x''_1, \quad s'x'_2 + s''x''_2, \ \ldots, \ s'x'_n + s''x''_n), \quad (1)$$

siendo s' y s'' dos cualesquiera números no negativos, cuya suma es 1. Siendo $s' = 1$ y $s'' = 0$ obtenemos el punto M' y siendo $s' = 0$ y $s'' = 1$, el punto M'', o sea, los extremos del segmento $M'M''$. Los demás puntos (se obtienen siendo $s' > 0$ y $s'' > 0$) se llaman *puntos internos* del segmento.

Entre otros conceptos, referentes al espacio n-dimensional, nos será necesario el concepto de plano hiperbólico o *hiperplano.* Este es la generalización del concepto de plano en un espacio tridimensional ordinario. El prefijo "hiper" tiene aquí un sentido completamente determinado. Y es que en un espacio n-dimensional puede haber "planos" de diferentes tipos: unidimensionales (llamados "lineas rectas"), bidimensionales, etc. y, finalmente, "planos" $(n - 1)$-dimensionales; estos últimos llevan el nombre de "hiperplanos".

DEFINICIÓN. *Hiperplano en un espacio n-dimensional se llama el conjunto de puntos* $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, *cuyas coordenadas satisfacen la ecuación de primer grado*

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n + b = 0, \quad (2)$$

en la cual, por lo menos uno de los números, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ (coeficientes de las incógnitas), *es diferente de cero.* Cuando $n = 3$ la ecuacion (2) toma la forma $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + b = 0$, que es, simplemente, la forma de la ecuación de un plano en un espacio ordinario, (en el cual las coordenadas se designan por x_1, x_2, x_3 y no por x, y, z como es habitual).

Con relación al hiperplano (2) todo el espacio n-dimensional

se divide en dos partes: región en la que se cumple la desigualdad

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n + b \geqslant 0, \qquad (3)$$

y región en la que

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n + b \leqslant 0. \qquad (4)$$

Estas regiones se llaman *semiespacios*. Así, pues, cada hiperplano divide todo el espacio en dos semiespacios, para los cuales, este hiperplano es parte común.

El concepto de cuerpo convexo también se generaliza en el caso n-dimensional. Un conjunto de puntos, en un espacio n-dimensional, se llama convexo, si junto con dos cualesquiera de sus puntos M' y M'' contiene también todo el segmento $M'M''$.

No es difícil demonstrar que *cualquier semiespacio es un conjunto convexo*. Efectivamente, supongamos que los puntos $M'(x'_2, \dots, x'_n)$ y M'' $(x''_1, x''_2, \dots, x''_n)$ pertenecen al semiespacio (3). Demostremos que cualquier punto M en el segmento $M'M''$ también pertenece a este semiespacio.

Las coordenadas del punto M se expresan de la forma (1) o, que es lo mismo, de la forma

$$\begin{aligned} x_1 &= sx'_1 + (1-s)x''_1, \\ x_2 &= sx'_1 + (1-s)x''_2, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots \qquad (0 \leqslant s \leqslant 1). \\ x_n &= sx'_n + (1-s)x''_n \end{aligned}$$

Sustituyendo por estas expresiones en el primer miembro de (3), recibimos

$$\begin{aligned} &a_1(sx'_1 + (1-s)x''_1) + a_2(sx'_2 + (1-s)x''_2 + \dots \\ &\quad \dots + a_n(sx'_n + (1-s)x''_n) + b = s(a_1x'_1 + a_2x'_2 + \dots \\ &\quad \dots + a_nx'_n) + (1-s)(a_1x''_1 + a_2x''_2 + \dots + a_nx''_n) + sb + (1-s)b \end{aligned}$$

[hemos sustituido el número b por la suma $sb + (1-s)b$], lo que es igual a

$$s[a_1x'_1 + \dots + a_nx'_n + b] + (1-s)[a_1x''_1 + \dots + a_nx''_n + b].$$

Cada una de las dos sumas comprendidas entre corchetes no es negativa, puesto que ambos puntos M' y M'' pertenecen al semiespacio (3). Por lo tanto, toda la expresión escrita tampoco

es negativa (pues, $s \geqslant 0$ y $(1 - s) \geqslant 0$). Con esto queda demostrado qué terminología geométrica deberá corresponder a un sistema de semiespacio es convexo.

Después de todo lo expuesto, no será difícil comprender qué terminología geométrica deberá corresponder a un sistema de desigualdades lineales con n incógnitas. Sea dado el sistema

$$\left.\begin{array}{r} a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n + a \geqslant 0 \\ b_1x_1 + b_2x_2 + \ldots + b_nx_n + b \geqslant 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n + c \geqslant 0. \end{array}\right\} \quad (5)$$

Cada una de las desigualdades escritas determina cierto semiespacio y todas en conjunto, cierta región $\mathscr{K}$ en un espacio n-dimensional, formada por la intersección de una cantidad finita de semiespacios. La región $\mathscr{K}$ es convexa, puesto que también lo es cualquiera de los semiespacios que la constituyen.

De forma análoga al caso tridimensional, *una región en un espacio n-dimensional, siendo está la intersección de un número finito de semiespacios, se denomina región poliédrica convexa y en el caso cuando dicha intersección es un conjunto limitado, simplemente, poliedro convexo.* Aquí el término "conjunto limitado" debe interpretarse en el sentido de que las coordenadas de todos los puntos de la regiòn considerada no superan en valor absoluto a cierta constante c:

$|x_1| \leqslant c, \ldots, |x_n| \leqslant c$ para todos los puntos de la región dada.

O sea, *el conjunto de puntos en un espacio n-dimensional, cuyas coordenadas satisfacen el sistema* (5), *es una región* $\mathscr{K}$ *poliédrica convexa, formada por la intersección de todos los semiespacios que corresponden a las desigualdades del sistema dado.*

Subrayamos una vez más que llamamos a esta región poliedro convexo cuando es limitada.

Los métodos de descripción real de la región $\mathscr{K}$, examinados en el párrafo 5 para sistemas con dos incógnitas y en el párrafo 6 para sistemas con tres incógnitas, pueden ser utilizados, con las modificaciones correspondientes, para casos de n incógnitas. No obstante, no nos detendremos en ellos, puesto que una descripción completa necesitaría mucho espacio. Además, siendo grande la cantidad de incógnitas, estos métodos se hacen poco eficaces: su utilización está relacionada con cálculos sumamente desmesurados.

Es notable que los teoremas generales sobre la estructura de conjuntos poliédricos convexos en un espacio tridimensional, conservan

totalmente su validez para espacios n-dimensionales aunque su demostración es más complicada. Nos limitaremos a dar la formulación de estos teoremas y las aclaraciones indispensables a ellas.

TEOREMA 1. *La cápsula convexa de cualquier sistema finito de puntos* $A_1, A_2, \ldots, A_p$ *es un poliedro convexo.*

Para mayor precisión, subrayamos que este teorema establece relación entre dos tipos de conjuntos definidos de diferente forma: entre la cápsula convexa de un sistema de puntos $A_1, A_2, \ldots, A_p$, designada por $\langle A_1, A_2, \ldots, A_p\rangle$ y definida como la multitud de todos los puntos de la forma

$$s_1A_1 + s_2A_2 + \ldots + s_pA_p,$$

siendo $s_1, s_2, \ldots, s_p$ cualesquiera números no negativos cuya suma es 1, y poliedros convexos, o sea, regiones limitadas, obtenidas como resultado de la intersección de una cantidad finita de semiespacios.

En espacios bidimensionales y tridimensionales la validez del teorema 1 es evidente (aunque sea por la evidencia del sentido de cápsula convexa) mientras que para casos polidimensionales no lo es y requiere demostración.

TEOREMA 1' (recíproco al 1). *Cualquier poliedro convexo coincide con la cápsula convexa de cierto sistema finito de puntos.*

Realmente se puede afirmar aún más: *un poliedro convexo coincide con la cápsula convexa de sus vértices.* La definición de vértice es la misma que para el caso bidimensional (vértice es aquel punto del poliedro que no es punto interno con relación a ningún segmento totalmente perteneciente a este poliedro). Se puede demostrar que el número de vértices es siempre finito.

TEOREMA 2 Cualquier conjunto de la forma $(B_1, B_2, \ldots, B_q)$, o coincide con todo el espacio, o bien representa cierto cono poliedro convexo con el vértice en el origen de las coordenadas.

Recordemos que el simbolo $(B_1, B_2, \ldots, B_q)$ *significa el conjunto de* todos los puntos, representados de la forma

$$t_1B_1 + t_2B_2 + \ldots + t_qB_q,$$

siendo $t_1, t_2, \ldots, t_q$ cualesquiera números no negativos. Un cono poliedro convexo se define como la intersección de un número finito de semiespacios, cuyos hiperplanos confines tienen un punto común (vértice del cono). La justeza del teorema 2 en un espacio tridimensional fue demostrada en el párrafo 4 (teorema 1 § 4. Con relación al caso polidimensional, véase al final del § 9).

TEOREMA 2'. *Cualquier cono poliedro convexo con el vértice en el origen de las coordenadas puede ser representado como* $(B_1, B_2, \ldots, B_q)$.

Su validez para casos tridimensionales fue demostrada en el párrafo 4 (*teorema* 2 § 4). Con relación al caso polidimensional, véase al final del § 12).

TEOREMA 3 *Calquier región convexa poliédrica puede ser representada en forma de suma*

$$\langle A_1, A_2, \dots, A_p\rangle + (B_1, B_2, \dots, B_q).$$

(Véase al final del § 10).

TEOREMA 3. *Cualquier suma de la forma indicada representa o todo el espacio, o cierta región poliédrica convexa en este espacio.*

§ 8. RESOLUCIÓN DE UN SISTEMA DE DESIGUALDADES LINEALES MEDIANTE LA REDUCCIÓN CONSECUTIVA DEL NÚMERO DE INCÓGNITAS

Por el curso de álgebra de la escuela media, nuestro lector conoce el procedimiento de resolución de un sistema de *ecuaciones* lineales, que consiste en la reducción consecutiva del número de incógnitas. Para sistemas con tres incógnitas x, y, z, el contenido de este procedimiento se puede describir de la siguiente forma.

En cada ecuación de un sistema dado la incógnita z se expresa mediante las incógnitas x e y. A continuación, las expresiones obtenidas (en las que figuran solamente x e y) se igualan una a otra. Resulta un sistema nuevo con dos incógnitas x e y. Por ejemplo, si el sistema inicial es

$$\left.\begin{aligned} 2x - 3y + z &= -1, \\ x - y + 2z &= 5, \\ 4y - z &= 5, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

entonces resolviendo cada una de las ecuaciones con relación a z, obtenemos

$$\left.\begin{aligned} z &= -2x + 3y - 1, \\ z &= -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + \frac{5}{2}, \\ z &= 4y - 5; \end{aligned}\right\} \tag{1'}$$

igualando, después, las expresiones de los segundos miembros (es suficiente igualar consecutivamente la primera de estas

expresiones a las restantes), obtenemos el sistema

$$\left.\begin{aligned} -2x+3y-1&=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y+\frac{5}{2},\\ 2x+3y-1&=4y-5, \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

con dos incógnitas x e y. Con respecto al sistema (2) se puede utilizar el mismo procedimiento: de las ecuaciones (2) hallamos

$$\left.\begin{aligned} y&=\frac{3}{5}x+\frac{7}{5},\\ y&=-2x+4, \end{aligned}\right\} \qquad (2')$$

después de lo cual obtenemos la ecuación

$$\frac{3}{5}x+\frac{7}{5}=-2x+4,$$

con una sola incógnita x. Resolviendo esta eauación, hallamos $x=1$; a continuación, del sistema (2′) hallamos $y=2$ y, por último, del sistema (1′) obtenemos $z=3$.

Resulta que cosa parecida puede realizarse con cualquier sistema de *desigualdades* lineales. La resolución de un sistema de desigualdades con n incógnitas $x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n$ se reduce, por este procedimiento, a la resolución de un sistema de desigualdades con $n-1$ incógnitas $x_1, \ldots, x_{n-1}$; a su vez, el sistema obtenido puede ser reducido a un sistema con $n-2$ incógnitas $x_1, \ldots, x_{n-2}$ y así sucesivamente, hasta obtener un sistema de desigualdades con una incógnita x_1. La resolución de un sistema con una incógnita es ya un problema completamente elemental. De tal forma obtenemos la posibilidad de hallar (por lo menos en principio) cualquier solución de un sistema inicial de desigualdades.

Así pues, sea dado un sistema de desigualdades lineales con n incógnitas $x_1, x_2, \ldots, x_n$, el cual, para mayor comodidad de referencia, llamaremos en lo sucesivo "sistema (S)".

Al examinar el sistema (S) surge una serie de preguntas: ¿será este sistema compatible? si es que sí, ¿cómo hallar todas sus soluciones?; ¿cómo están formados los sistemas incompatibles de desigualdades? A todas estas preguntas la respuesta será dada en éste párrafo y en el siguiente. Al mismo tiempo, resulta, muy útil ligar a cada sistema de desigualdades lineales un sistema nuevo, cuyo número de incógnitas es inferior en una

unidad al número de éstas en el sistema inicial; llamaremos este nuevo sistema, sistema *asociado.*

Pasamos a su descripción.

Examinemos cualquier desigualdad del sistema (S). Esta tendrá la forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n + a \geqslant 0. \qquad (3)$$

Si $a_n = 0$, dejamos esta desigualdad sin modificaciones. Si $a_n < 0$, entonces pasamos el término a_nx_n al segundo miembro de la desigualdad, y dividiendo ambos miembros de la misma por un número positivo $-a_n$, obtenemos una desigualdad de la forma

$$b_1x_1 + \ldots + b_{n-1}x_{n-1} + b \geqslant x_n.$$

En el caso cuando $a_n > 0$, todos los sumandos, menos a_nx_n, se trasladan al segundo miembro de la desigualdad, y dividiendo ambas partes de esta desigualdad por a_n, obtenemos la desigualdad

$$x_n \geqslant c_1x_1 + \ldots + c_{n-1}x_{n-1} + c,$$

Así, pues, multiplicando cada desigualdad del sistema inicial por un número positivo conveniente obtenemos un sistema equivalente al primero de la forma

$$\left.\begin{array}{l}
\boxed{\begin{array}{l} P_1 \geqslant x_n, \\ P_2 \geqslant x_n, \\ \quad . \ . \ . \\ P_p \geqslant x_n; \end{array}} \\
\boxed{\begin{array}{l} x_n \geqslant Q_1, \\ x_n \geqslant Q_2, \\ \quad . \ . \ . \\ x_n \geqslant Q_q; \end{array}} \\
\boxed{\begin{array}{l} R_1 \geqslant 0, \\ R_2 \geqslant 0, \\ \quad . \ . \ . \\ R_r \geqslant 0, \end{array}}
\end{array}\right\} \qquad (T)$$

siendo $P_1, \ldots, P_p$; $Q_1, \ldots, Q_q$; $R_1, \ldots, R_r$ expresiones de la forma $a_1x_1 + \ldots + a_{n-1}x_{n-1} + a$ (que no contienen x_n)*⁾.

El sistema (T) puede escribirse en forma más breve:

$$\left.\begin{array}{r} P_\alpha \geqslant x_n \geqslant Q_\beta, \\ R_\gamma \geqslant 0, \end{array}\right\}$$

siendo α cualquiera de los números 1, 2, ..., β, cualquiera de los números 1, 2, ..., q y γ, cualquiera de los números 1, 2, ..., r.

Analicemos junto con el sistema (T) el sistema

$$\left.\begin{array}{r} P_\alpha \geqslant Q_\beta, \\ R_\gamma \geqslant 0 \end{array}\right\} \qquad (S')$$

(siendo α cualquiera de los números 1, 2, ..., p; β, cualquiera de los números 1, 2, ..., q y γ, cualquiera de los números 1, 2, ..., r) con $n-1$ incógnitas $x_1, \ldots, x_{n-1}$ **⁾.

Acordamos llamar a este sistema asociado [con relación al sistema inicial (S) o al sistema equivalente a él (T)].

Entre las soluciones de los sistemas (S) y (S') existe una relación estrecha. La expresión de esta relación es el siguiente teorema.

TEOREMA. *Si en cualquier solución del sistema (S) eliminamos el valor de la última incógnita x_n, obtenemos cierta solución del sistema asociado (S').*

A la inversa: para cualquier solución del sistema asociado (S') se puede hallar un valor determinado de la incógnita x_n, que adheriéndolo a esta solución, nos da una solución del sistema inicial (S).

La primera afirmación de este teorema es evidente [si cualquier conjunto de valores de las incógnitas satisface el sistema

---

*⁾ Naturalmente, si en el sistema (S) no hay ni una desigualdad en la que $a_n < 0$, entonces en el sistema (T) faltará el primer bloque. De forma análoga, si no hay desigualdades con $a_n > 0$, entonces en el sistema (T) faltará el segundo bloque. Por último, si en (S) no hay desigualdades con $a_n = 0$, entonces en (T) faltará el tercer bloque.

**⁾ Si resulta que en el sistema (T) *falta el primero o* segundo bloque, entonces (S') estará compuesto solamente por las desigualdades $R_\gamma \geqslant 0$. Si en (T) falta el tercer bloque, entonces (S') tendrá, solamente las desigualdades $P_\alpha \geqslant Q_\beta$.

(S), entonces este conjunto también satisface el sistema (T); pero entonces con este mismo conjunto también se cumplen todas las desigualdades del sistema (S')]. Demostremos la segunda.

Sea

$$x_1 = x_1^0, \ldots, x_{n-1} = x_{n-1}^0$$

cualquier solución del sistema (S'). Sustituyendo los valores indicados de las incógnitas en las expresiones $P_1, \ldots, P_p$; $Q_1, \ldots, Q_q$; $R_1, \ldots, R_r$, obtenemos ciertos números $P_1^0, \ldots, P_p^0$; $Q_1^0, \ldots, Q_q^0$; $R_1^0, \ldots, R_r^0$. Para ellos deben cumplirse las desigualdades:

$$P_\alpha^0 \geqslant Q_\beta^0 \tag{4}$$

(siendo α cualquiera de los números 1, 2, ..., p y β, cualquiera de los números 1, 2, ..., q) y

$$R_\gamma^0 \geqslant 0 \tag{5}$$

(siendo γ cualquiera de los números 1, 2, ..., r).

El primer grupo de estas desigualdades [o sea la (4)], demuestra que cada uno de los números $Q_1^0, \ldots, Q_q^0$ no es mayor que cualquiera de los números $P_1^0, \ldots, P_p^0$. Pero, en tal caso, obligatoriamente habrá un número x_n^0, comprendido entre todos los números $Q_1^0, \ldots, Q_q^0$ y todos los números $P_1^0, \ldots, P_p^0$:

$$P_\alpha^0 \geqslant x_n^0 \geqslant Q_\beta^0,$$

siendo α cualquiera de los números 1, 2, ..., p; y β, cualquiera de los números 1, 2, ..., q (fig. 46). Ahora bien, estas

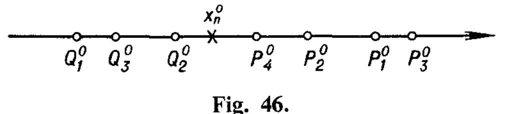


Fig. 46.

desigualdades, junto con las desigualdades (5) significan que el conjunto de valores de las incógnitas

$$x_1 = x_1^0, \ldots, x_{n-1} = x_{n-1}^0, \ x_n = x_n^0$$

es solución del sistema (T) y, por consiguiente, también de (S). El teorema está demostrado.

Los dos siguientes complementos a este teorema jugarán en lo sucesivo un papel importante.

1. *El sistema (S) de desigualdades lineales es compatible en aquel y sólo en aquel caso, cuando es compatible el sistema asociado a él (S′).* Esta es una consecuencia directa del teorema demostrado.

2. *Todas las soluciones del sistema inicial (S) pueden ser obtenidas de la siguiente forma: a cada solución* $x_1^0, \ldots, x_{n-1}^0$ del sistema asociado (S′) deberá agregarse cualquiera de los números x_n^0, comprendidos entre todos los números $Q_1^0, \ldots, Q_q^0$ y todos los números $P_1^0, \ldots, P_p^0$. Esta afirmación, de hecho, fue ya demostrada durante la demostración del teorema anterior.

Unas palabras acerca del sentido geométrico de este teorema. Supongamos que (S) es un sistema de desigualdades con tres incógnitas x, y, z. El sistema asociado (S′) es un sistema con dos incógnitas x, y. Designamos por $\mathscr{K}$ (S) la región de soluciones del sistema (S) (es cierto conjunto de puntos en el espacio) y por $\mathscr{K}$ (S′) la región de soluciones del sistema (S′) (un conjunto de puntos en un plano). El teorema demostrado, en el lenguaje de la geometria, significa lo siguiente.

La región $\mathscr{K}$(S′) es la proyección de la región $\mathscr{K}$(S) en un plano de coordenadas xOy.

Así, pues, para un sistema arbitrario (S) de desigualdades lineales con incógnitas $x_1, x_2, \ldots, x_n$ hemos formado un sistema asociado nuevo (S′), cuyas incógnitas son $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$. A su vez, para el sistema (S′) se puede componer un sistema asociado (S″) (cuyas incógnitas son $x_1, x_2, \ldots, x_{n-2}$), para este último, un sistema asociado (S‴), etc. Continuando este proceso, después de una serie de pasos, obtenemos el sistema $(S^{(n-1)})$ compuesto por desigualdades *con una* incógnita x_1. De la afirmación 1 hecha anteriormente se deduce que el sistema (S) es compatible en aquel, y sólo en aquel caso, cuando es compatible el sistema $(S^{(n-1)})$. Ahora bien, resolver el problema sobre la compatibilidad o incompatibilidad de un sistema con una incógnita no representa dificultad alguna. De tal forma, realizando cálculos sumamente simples, podemos determinar, si es compatible el sistema (S) o no.

Supongamos que dicho sistema es compatible. Entonces surge el problema: resolver este sistema o, hablando más concreto, *determinar todas sus soluciones* (todos los conjuntos de valores de las incógnitas para los cuales se cumplen las desigualdades del sistema dado). Obraremos desde el siguiente punto de vista (aunque al principio le parezca extraño a nuestro lector): *el sistema (S) estará resuelto, cuando estén formados los sistemas* (S′), (S″), ..., $(S^{(n-1)})$. En qué está basado este punto de vista, lo veremos a continuación, pero antes introduciremos una.

DEFINICIÓN. El conjunto de valores de las k primeras incógnitas

$$x_1^0, x_2^0, \ldots, x_k^0$$

se llama admisible, cuando puede ser prolongado hasta la solución del sistema inicial (S), es decir, cuando existen tales números $x_{k+1}^0, \ldots, x_n^0$ que el conjunto $x_1^0, \ldots, x_k^0, x_{k+1}^0, \ldots, x_n^0$ es solución del sistema (S).

Una vez formados los sistemas (S'), (S''), etc., obtenemos la posibilidad de:

1) hallar todos los valores admisibles de la incógnita x_1 [del sistema $(S^{(n-1)})$];

2) hallar para cualquier valor determinado y admisible de x_1^0, todos los valores de la incógnita x_2 compatibles con él, es decir, unos valores que junto con x_1^0 formen un conjunto admisible [éstos se hallan mediante sustituciones de x_1^0 en el sistema $(S^{(n-2)})$];

3) hallar para cualquier conjunto determinado y admisible x_1^0, x_2^0, todos los valores de la incógnita x_3 compatibles con él [éstos se hallan mediante sustituciones de x_1^0 y x_2^0 en el sistema $(S^{(n-3)})$] y así sucesivamente.

Precisamente en este sentido debe interpretarse nuestra afirmación de que el sistema (S) se considera resuelto una vez formados los sistemas (S'), (S''), $\ldots$, $(S^{(n-1)})$.

EJEMPLO. Resolvamos, en el sentido indicado, el sistema

$$\left.\begin{aligned} 7x + 2y - 2z - 4 &\geqslant 0, \\ -x - y - z + 4 &\geqslant 0, \\ -2x + 3y + z - 1 &\geqslant 0, \\ 5x - y + z + 2 &\geqslant 0. \end{aligned}\right\}$$

Resolviendo cada desigualdad de este sistema con relación a z, obtenemos un sistema de la forma

$$\left.\begin{aligned} \frac{7}{2}x + y - 2 &\geqslant z, \\ -x - y + 4 &\geqslant z, \\ z &\geqslant 2x - 3y + 1 \\ z &\geqslant -5x + y - 2. \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

El sistema asociado tiene la forma

$$\left.\begin{aligned} \frac{7}{2}x + y - 2 &\geqslant 2x - 3y + 1,\\ \frac{7}{2}x + y - 2 &\geqslant -5x + y - 2,\\ -x - y + 4 &\geqslant 2x - 3y + 1,\\ -x - y + 4 &\geqslant -5x + y - 2 \end{aligned}\right\}$$

o, después de la reducción de términos semejantes,

$$\left.\begin{aligned} \frac{3}{2}x + 4y - 3 &\geqslant 0,\\ \frac{17}{2}x &\geqslant 0,\\ -3x + 2y + 3 &\geqslant 0,\\ 4x - 2y + 6 &\geqslant 0. \end{aligned}\right\}$$

Resolviendo cada desigualdad con relación a y, obtenemos un sistema de la forma

$$\left.\begin{aligned} y &\geqslant -\frac{3}{8}x + \frac{3}{4},\\ y &\geqslant \frac{3}{2}x - \frac{3}{2},\\ 2x + 3 &\geqslant y,\\ x &\geqslant 0. \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

El sistema asociado a él tiene la forma

$$\left.\begin{aligned} 2x + 3 &\geqslant -\frac{3}{8}x + \frac{3}{4},\\ 2x + 3 &\geqslant \frac{3}{2}x - \frac{3}{2},\\ x &\geqslant 0; \end{aligned}\right\}$$

éste último es equivalente a la desigualdad

$$x \geqslant 0. \qquad (8)$$

O sea, el sistema inicial es compatible. Conforme al punto

de vista a que nos atenemos, los sistemas (8), (7), (6) dan solución al problema planteado. A saber, la desigualdad (8) muestra que existe una solución (x, y, z) del sistema inicial, con cualquier x no negativo. Si se elige un valor concreto de x, entonces por el sistema (7) se pueden hallar los posibles valores de y. Si se eligen unos valores concretos de x e y, entonces por el sistema (6) se hallan los valores posibles de z.

Sea, por ejemplo, $x = 1$, entonces por el sistema (7) obtenemos las siguientes desigualdades que limitan a y:

$$5 \geqslant y \geqslant \frac{3}{8}.$$

Sea, por ejemplo, $y = 4$. Suponiendo en el sistema (6) $x = 1$ y $y = 4$, obtenemos desigualdades que limitan a z:

$$\frac{11}{2} \geqslant z,$$

$$-1 \geqslant z,$$

$$z \geqslant -9,$$

$$z \geqslant -3$$

o simplemente

$$-1 \geqslant z \geqslant -3.$$

Supondiendo, por ejemplo, $z = -2$, obtenemos una de las soluciones del sistema inicial: $x = 1$, $y = 4$, $z = -2$.

§ 9. SISTEMA HOMOGÉNEO DE DESIGUALDADES LINEALES. CONJUNTO FUNDAMENTAL DE SOLUCIONES

En el párrafo 8 hemos analizado el método utilizado para hallar soluciones de sistemas de desigualdades lineales. No obstante a todos los méritos evidentes de este método, dar solución con él a una serie de problemas no es posible; por ejemplo, este método no permite determinar *el conjunto de todas las soluciones* de un sistema de desigualdades dado. Precisamente a esta cuestión están dedicados los dos siguientes párrafos del presente libro. Las principales dificultades, como veremos, van ligadas al análisis

de sistemas *homogéneos*, este problema se trata en el presente párrafo; el caso general (es decir, de sistemas de desigualdades no homogéneos) se analiza en el párrafo 10. Además, no existe la necesidad imperiosa de limitarse a casos de dos o tres incógnitas; desde el comienzo, examinaremos sistemas compuestos por cualquier número de desigualdades y con cualquier número de incógnitas. Para comodidad del lector dividiremos lo expuesto en una serie de apartados.

1°. *Función lineal de n argumentos.* La forma general de una desigualdad homogénea con n incógnitas es

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n \geqslant 0.$$

Veamos por separado la expresión

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n, \qquad (1)$$

dada en el primer miembro de la desigualdad. Esta expresión se llama *función lineal.* En calidad de argumentos se toman n variables $x_1, x_2, \dots, x_n$. Por cierto, se puede considerar que la función (1) depende no de n argumentos, sino *de uno.* Este argumento es el punto

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_n),$$

situado en un espacio n-dimensional.

En lo sucesivo, acordaremos designar la función (1), brevemente, por $L(X)$:

$$L(X) = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n;$$

si es que se dan, no una, sino varias funciones como ésta, entonces las designamos por $L_1(X)$, $L_2(X)$, etc.

Establecemos dos propiedades de una función lineal, que son:

1.

$$L(kX) = kL(X),$$

siendo X cualquier punto y k cualquier número.

2.

$$L(X + Y) = L(X) + L(Y),$$

siendo X e Y dos puntos cualesquiera. La propiedad 1 se deduce de forma evidente de la igualdad

$$a_1(kx_1) + a_2(kx_2) + \dots + a_n(kx)_n =$$
$$= k(a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n).$$

Ahora demostraremos la propiedad 2. Sean

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ e } Y = (y_1, y_2, \dots, y_n).$$

Entonces

$$L(X + Y) = a_1(x_1 + y_1) + a_2(x_2 + y_2) + \dots$$
$$\dots + a_n(x_n + y_n) = (a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n) +$$
$$+ (a_1y_1 + a_2y_2 + \dots + a_ny_n) = L(X) + L(Y).$$

2°. *Algunas propiedades de las soluciones de un sistema homogéneo de desigualdades lineales.* Sea dado el sistema homogéneo de m desigualdades lineales con n incógnitas:

$$\left.\begin{array}{l} a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n \geqslant 0 \text{ (1}^{\text{a}}\text{ desigualdad)}, \\ b_1x_1 + b_2x_2 + \dots + b_nx_n \geqslant 0 \text{ (2}^{\text{a}}\text{ desigualdad)}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \geqslant 0 \text{ (}m^{\text{a}}\text{ desigualdad)}. \end{array}\right\}$$

Designando los primeros miembros de estas desigualdades respectivamente por: $L_1(X), L_2(X), \dots, L_m(X)$, el sistema dado adquiere la forma

$$\left.\begin{array}{r} L_1(X) \geqslant 0, \\ L_2(X) \geqslant 0, \\ \dots\dots \\ L_m(X) \geqslant 0. \end{array}\right\} \qquad (2)$$

siendo

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Hacemos las dos siguientes afirmaciones:

1. *Si el punto X es solución del sistema* (2) *y k es un número cualquiera no negativo, entonces el punto kX es nuevamente solución del sistema* (2).

2. *Si X* e *Y son dos soluciones del sistema* (2), *entonces $X + Y$ es nuevamente solución del sistema* (2).

Estas dos afirmaciones se deducen fácilmente de las propiedades de las funciones lineales, demostradas en el apartado 1°. Efectivamente, sea i cualquiera de los números $1, 2, \dots, m$. Tenemos

$$L_i(kX) = kL_i(X) \geqslant 0$$

(puesto que $k \geqslant 0$ y $L_i(X) \geqslant 0$), y además

$$L_i(X + Y) = L_i(X) + L_i(Y) \geqslant 0.$$

(puesto que $L_i(X) \geqslant 0$ y $L_i(Y) \geqslant 0$).
De las afirmaciones 1 y 2 se deduce directamente el siguiente corolario.

Si ciertos puntos $X_1, X_2, \ldots, X_p$ son soluciones del sistema (2), entonces cualquier punto de la forma

$$k_1X_1 + k_2X_2 + \ldots + k_pX_p, \qquad (3)$$

siendo $k_1k_2, \ldots, k_p$ números no negativos, también es solución del sistema (2).

En efecto, cada uno de los puntos $k_1X_1, k_2X_2, \ldots, k_pX_p$, conforme a la afirmación 1, es solución 'del sistema (2), pero entonces también la suma de estos puntos, conforme a la afirmación 2, será solución del sistema (2).

Acordaremos denominar cualquier punto de la forma (3), en la que $k_1, k_2, \ldots, k_p$ son números no negativos, por *combinación no negativa* de los puntos $X_1, X_2, \ldots, X_p$. Entonces, el corolario deducido renglones anteriores, admite la siguiente formulación:

Una combinación no negativa de cualquier número de soluciones del sistema homogéneo (2) es nuevamente solución de este sistema.

3°. *Conjunto fundamental de soluciones.* Introducimos la siguiente definición:

El conjunto de un número finito de soluciones

$$X_1, X_2, \ldots, X_p$$

del sistema homogéneo (2) se llama *conjunto fundamental* de soluciones, si cualquier solución X de este sistema puede ser dada por la fórmula

$$X = k_1X_1 + k_2X_2 + \ldots + k_pX_p \qquad (4)$$

siendo $k_1, k_2, \ldots, k_p$ números no negativos. En este caso, por lo tanto, la fórmula (4), en la cual $k_1, k_2, \ldots, k_p$ son cualesquiera números no negativos, da posibilidad para determinar *todas las soluciones del sistema* (2). Por eso, queda claro, que la determinación de un conjunto fundamental de soluciones es un problema de primera importancia para el análisis del sistema (2). El objetivo de nuestras formaciones será, precisamente, la elaboración de un algoritmo que permita, mediante operaciones sumamente

simples, hallar el conjunto fundamental de soluciones para cualquier sistema (2).

4°. *Formación de un conjunto fundamental para un sistema compuesto por una desigualdad.* Formemos el conjunto fundamental de soluciones para la desigualdad

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n \geqslant 0, \qquad (5)$$

donde los números a_1, a_2, ..., a_n no son, al mismo tiempo, iguales a cero.

Con este fin examinaremos, junto con la desigualdad (5), la ecuación

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = 0. \qquad (6)$$

Por las propiedades de una función lineal, demostradas en el apartado 1°, fácilmente se deducen las dos siguientes afirmaciones:

1. Si X es una solución cualquiera de la ecuación (6) y k cualquier número, entonces kX es nuevamente solución de la ecuación (6).

2. Si X e Y son dos soluciones de la ecuación (6), entonces $X + Y$ es nuevamente solución de la ecuación (6).

Concedemos al lector la demostración de estas afirmaciones. Conforme a la condición, entre los números a_1, a_2, ..., a_n los hay no iguales a cero. Supongamos, por ejemplo, que $a_n \neq 0$. Entonces la ecuación puede ser expresada de la forma

$$x_n = -\frac{1}{a_n}(a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_{n-1}x_{n-1}). \qquad (6')$$

Suponiedo $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, ..., $x_{n-1} = 0$, hallamos por la última ecuación $x_n = -\dfrac{a_1}{a_n}$. Así pues, el punto

$$X_1 = \left(1, 0, \ldots, 0, -\frac{a_1}{a_n}\right)$$

es solución de la ecuación (6). De forma análoga se pueden obtener las soluciones

$$X_2 = \left(0, 1, \ldots, 0, -\frac{a_2}{a_n}\right),$$

. . . .

$$X_{n-1} = \left(0, 0, \ldots, 1, -\frac{a_{n-1}}{a_n}\right).$$

Supongamos, ahora, que

$$X = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}, \alpha_n) \tag{7}$$

es cualquier solución de la ecuación (6). Conforme a (6′), obtenemos,

$$\alpha_n = -\frac{1}{a_n}(a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \ldots + a_{n-1}\alpha_{n-1}) =$$
$$= \alpha_1\left(-\frac{a_1}{a_n}\right) + \alpha_2\left(-\frac{a_2}{a_n}\right) + \ldots + \alpha_{n-1} \times$$
$$\times\left(-\frac{a_{n-1}}{a_n}\right).$$

Examinando el punto

$$\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \ldots + \alpha_{n-1} X_{n-1} =$$
$$= \alpha_1\left(1, 0, \ldots, -\frac{a_1}{a_n}\right) + \alpha_2\left(0, 1, \ldots, \frac{a_2}{a_n}\right) + \ldots$$
$$\ldots + \alpha_{n-1}\left(0, 0, \ldots, 1, -\frac{a_{n-1}}{a_n}\right),$$

nos convencemos de que sus coordenadas coinciden con las coordenadas del punto X. Por eso es válida la igualdad

$$X = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \ldots + \alpha_{n-1} X_{n-1}. \tag{8}$$

Ahora, agregamos a los puntos antes construidos $X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}$ uno más:

$$X_n = -(X_1 + X_2 + \ldots + X_{n-1}). \tag{9}$$

Por las propiedades de las soluciones de la ecuación (6), dadas al principio de este punto, se deduce que el punto X_n también es solución. Ahora no será difícil demostrar el siguiente hecho: *cualquier solución X de la ecuación* (6) *es una combinación no negativa de soluciones $X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}, X_n$.*

En efecto, sea α un número positivo que supera a cualquiera de los números $|\alpha_1|, |\alpha_2|, \ldots, |\alpha_{n-1}|$. De (8) y (9) se deduce que

$$X = (\alpha_1 + \alpha)X_1 + (\alpha_2 + \alpha)X_2 + \ldots + (\alpha_{n-1} + \alpha)X_{n-1} + \alpha X_n,$$

lo que sirve como demostración de nuestra afirmación.

Para abreviar la escritura, más adelante, designaremos el primer miembro de la ecuación (6) por $L(X)$. Elegimos una solución cualquiera de la ecuación $L(X) = 1$ y designamos esta solución

por X_{n+1}: Afirmamos que el *conjunto de puntos*

$$X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_{n-1},\ X_n,\ X_{n+1} \qquad (10)$$

es el conjunto fundamental de soluciones para la desigualdad (5).

En efecto, cada uno de los puntos indicados satisface la desigualdad (5). Supongamos, ahora que X' es cualquier solución de esta desigualdad; por consiguiente, $L(X') = a$, siendo $a \geqslant 0$. Entonces el punto

$$X = X' - aX_{n+1}$$

satisface la ecuación (6), pues

$$L(x) = L(X') - aL(X_{n+1}) = a - a \cdot 1 = 0.$$

Expresando ahora

$$X' = X + aX_{n+1}$$

y teniendo en cuenta que el punto X es una combinación no negativa de puntos $X_1, \ldots, X_{n-1}, X_n$, queda claro que X' puede ser representada en forma de combinación no negativa de los puntos (10).

Veamos un ejemplo concreto. Supongamos que es preciso formar un conjunto fundamental de soluciones para la desigualdad

$$-2x_1 - 4x_2 + x_3 \geqslant 0 \qquad (11)$$

con tres incógnitas x_1, x_2, x_3.

Primeramente escribimos la ecuación

$$-2x_1 - 4x_2 + x_3 = 0,$$

la cual resolvemos con relación a una de las incógnitas, por ejemplo, a x_3:

$$x_3 = 2x_1 + 4x_2.$$

Ahora consideramos, consecutivamente, una de las incógnitas x_1 o x_2 (que forman el segundo miembro de la ecuación) igual a 1 y las restantes, a cero. Obtenemos las siguientes soluciones:

$$X_1 = (1,\ 0,\ 2), \qquad X_2 = (0,\ 1,\ 4).$$

Seguidamente tomamos en calidad de X_3 el punto

$$X_3 = -(X_1 + X_2) = (-1,\ -1,\ -6)$$

y, por último, en calidad de X_4 tomamos una de las soluciones

de la ecuación

$$-2x_1 - 4x_2 + x_3 = 1,$$

por ejemplo, $X_4 = (0,\ 0,\ 1)$.

Los puntos X_1, X_2, X_3, X_4 forman el conjunto fundamental de soluciones para la desigualdad (11). La solución general tiene la forma

$$X = k_1X_1 + k_2X_2 + k_3X_3 + k_4X_4 =$$
$$= k_1(1,\ 0,\ 2) + k_2(0, 1, 4) + k_3(-1,\ -1,\ -6) + k_4(0, 0, 1),$$

o bien,

$$x_1 = k_1 - k_3,$$
$$x_2 = k_2 - k_3,$$
$$x_3 = 2k_1 + 4k_2 - 6k_3 + k_4,$$

siendo k_1, k_2, k_3, k_4 números arbitrarios no negativos.

5°. *Transformación de un conjunto fundamental de soluciones agregando al sistema una desigualdad más.* Para aprender a formar conjuntos fundamentales de soluciones, examinaremos primeramente el siguiente problema.

Sea dado el sistema homogéneo

$$\left.\begin{array}{l} L_1(X) \geqslant 0, \\ L_2(X) \geqslant 0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ L_m(X) \geqslant 0, \end{array}\right\} \qquad (12)$$

de desigualdades lineales. Supongamos, seguidamente, que es conocido el conjunto fundamental de soluciones

$$X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_p$$

para este sistema. Es preciso confeccionar el conjunto fundamental de soluciones para un sistema, obtenido agregando al (12) *una desigualdad más*

$$L(X) \geqslant 0. \qquad (13)$$

Las soluciones del sistema (12) son exactamente todas las combinaciones no negativas de los puntos X_1, X_2, $\ldots$, X_p. Entre dichas combinaciones debemos elegir aquellas que satisfacen la desigualdad (13) y, además, forman el conjunto fundamental de soluciones para el sistema (12), (13).

Con relación a la función $L(X)$ – primer miembro de la desigualdad (13) – todos los puntos $X_1, X_2, \ldots, X_p$ se pueden dividir en grupos: puntos para los cuales $L(X) > 0$, puntos para los cuales $L(X) < 0$ y, por último, puntos para los cuales $L(X) = 0$. Designamos los puntos del primer grupo por X_1^+, $X_2^+, \ldots, X_k^+$, los del segundo, por $X_1^-, X_2^-, \ldots, X_l^-$ y los del tercero, por $X_1^0, X_2^0, \ldots, X_s^0$.

Así, pues

$$X_1^+, \ldots, X_k^+, X_1^-, \ldots, X_l^-, X_1^0, \ldots, X_s^0,$$

son los mismos puntos $X_1, X_2, \ldots, X_p$, pero posiblemente situados en otro orden.

Naturalmente que todos los puntos X_α^+ $(\alpha = 1, \ldots, k)$ satisfacen la desigualdad (13). Lo mismo se refiere a X_γ^0 $(\gamma = 1, \ldots, s)$. En cuanto a los puntos X_β^- $(\beta = 1, \ldots, l)$, entre ellos no hay ni uno que sea solución de la desigualdad (13). No obstante, con cada par

$$X_\alpha^+ \quad X_\beta^-,$$

(un punto "positivo" y otro "negativo") se puede confeccionar una combinación no negativa

$$aX_\alpha^+ + bX_\beta^- \qquad (14)$$

de tal forma, que satisfaga la condición $L(X) = 0$. Para ello se debe tomar

$$a = -L(X_\beta^-), \quad b = L(X_\alpha^+). \qquad (15)$$

Efectivamente, los números a y b son positivos y, además,

$$L(aX_\alpha^+ + bX_\beta^-) = aL(X_\alpha^+) + bL(X_\beta^-) =$$
$$= -L(X_\beta^-)L(X_\alpha^+) + L(X_\alpha^+)L(X_\beta^-) = 0.$$

Designamos el punto (14), en el que a y b tienen los valores indicados anteriormente, por $X_{\alpha\beta}^0$:

$$X_{\alpha\beta}^0 = -L(X_\beta^-)X_\alpha^+ + L(X_\alpha^+)X_\beta^-. \qquad (16)$$

Respuesta al problema planteado da el siguiente

TEOREMA. *Los puntos*

$$X_1^+, \ldots, X_k^+, X_1^0, \ldots, X_s^0, X_{11}^0, X_{12}^0, \ldots, X_{kl}^0 \qquad (17)$$

en total están escritos $k + s + kl$ puntos) *forman el conjunto fundamental de soluciones para el sistema* (12), (13).

Para demostrar este teorema, es preciso demostrar el siguiente.

LEMA. *Cualquier combinación de puntos no negativa* X_α^+ *y* X_β^- *puede ser expresada como una combinación no negativa de puntos* X_α^+, $X_{\alpha\beta}^0$ *o también, como una combinación no negativa de puntos* X_β^-, $X_{\alpha\beta}^0$.

DEMOSTRACIÓN DEL LEMA. Sea

$$X = cX_\alpha^+ + dX_\beta^-$$

una combinación no negativa de puntos X_α^+ y X_β^-, Examinemos junto con X el punto

$$X_{\alpha\beta}^0 = ax_\alpha^+ + bX_\beta^-,$$

donde los números a y b están determinados por las fórmulas (15).

Comparamos dos razones: $\frac{c}{a}$ y $\frac{d}{b}$. Si la primera es mayor que la segunda, entonces considerando $\frac{d}{b} = \lambda$ y $\frac{c}{a} = \lambda + \mu$, donde $\mu > 0$, tendremos:

$$X = (\lambda a + \mu a) X_\alpha^+ + \lambda b X_\beta^- = \lambda X_{\alpha\beta}^0 + \mu a X_\alpha^+,$$

es decir, el punto X puede ser expresado en forma de combinación no negativa de X_α^+ y $X_{\alpha\beta}^0$. Si dichas razones son iguales, entonces $X = \lambda X_{\alpha\beta}^0$. Y por último, si $\frac{c}{a} < \frac{d}{b}$, entonces, considerando $\frac{c}{a} = \lambda$ y $\frac{d}{b} = \lambda + \mu$, donde $\mu > 0$, obtenemos

$$X = \lambda X_{\alpha\beta}^0 + \mu b X_\beta^-.$$

El lema está demostrado.

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA. Ante todo, observemos que cada uno de los puntos (17) satisface el sistema (12), (13). Por lo tanto, para demostrar el teorema, nos queda solamente comprobar lo siguiente: si cualquier punto X es solución del sistema (12), (13), entonces este punto puede expresarse en forma de combinación no negativa de los puntos (17).

Siendo solución del sistema (12), el punto X se expresa en forma de combinación no negativa de puntos fundamentales X_1, $X_2, \ldots, X_p$ de este sistema:

$$X = a_1X_1^+ + \ldots + a_kX_k^+ + b_1X_1^- + \ldots$$
$$\ldots + b_lX_l^- + c_1X_1^0 + \ldots + c_sX_s^0, \qquad (18)$$

donde todos los coeficientes $a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_l, c_1, \ldots, c_s$ son no negativos.

Si todos los números $b_1, \ldots, b_l$ son iguales a cero, entonces es evidente que no hay nada que demostrar. Supongamos, por lo tanto, que entre estos números los hay estrictamente positivos. Observamos que entonces entre los números $a_1, \ldots, a_k$ también los habrá estrictamente positivos: de lo contrario resultaría que

$$L(X) = b_1L(X_1^-) + \ldots + b_lL(X_l^-) + c_1L(X_1^0) + \ldots + c_sL(X_s^0),$$

cosa imposible, puesto que X satisface la desigualdad (13).

Supongamos, para determinar, que $a_1 > 0$ y $b_1 > 0$. Valiéndonos del lema, podemos sustituir la suma $a_1X_1^+ + b_1X_1^-$ por una combinación no negativa de los puntos X_1^+, X_{11}^0, o de los puntos X_1^-, X_{11}^0. Si en la expresión para el punto X se realiza tal sustitución, entonces la cantidad total de coeficientas de $X_1^+, \ldots$ $\ldots, X_k^+, X_1^-, \ldots, X_l^-$, diferentes de cero, disminuye por lo menos en 1. Si en este caso resulta que en la expresión obtenida nuevamente para X, no todos los coeficientes de $X_1^-, \ldots, X_l^-$ son nulos, entonces se procede otra vez a la sustitución de una de las sumas de la forma $aX_\alpha^+ + bX_\beta^-$ por una combinación no negativa de los puntos X_α^+, $X_{\alpha\beta}^0$ o de los puntos X_β^-, $X_{\alpha\beta}^0$; como resultado, la cantidad de coeficientes de $X_1^+, \ldots, X_k^+, X_1^-, \ldots, X_l^-$, diferentes de cero, disminuye otra vez por lo menos en 1. Así continuará hasta obtener una expresión para el punto X, en la cual todos los coeficientes de $X_1^-, \ldots, X_l^-$ sean iguales a cero. De tal modo obtenemos una igualdad de la forma

$$X = a_1'X_1^+ + \ldots + a_k'X_k^+ + \sum_{\alpha,\beta} d_{\alpha\beta}X_{\alpha\beta}^0 + c_1X_1^0 + \ldots + c_sX_s^0,$$

en la que todos los coeficientes del segundo miembro son mayores o iguales a cero. Pero esto es precisamente la expresión requerida para X. El teorema está demostrado.

6°. *Existencia y método de formación de un conjunto fundamental de soluciones.* Examinemos un sistema arbitrario de desigualdades homogéneas lineales. Para la primer desigualdad de este sistema se puede formar un conjunto fundamental de soluciones (por el método descrito en el 4° apartado). Agregando a esta primera desigualdad la segunda, y basándose en el teorema del 5° apartado podemos formar un conjunto fundamental de soluciones

para el sistema compuesto por las dos primeras desigualdades. Si a continuación agregamos la tercera desigualdad y seguimos este proceso sucesivamente, obtendremos el conjunto fundamental de soluciones para todo el sistema inicial de desigualdades. De tal forma se demuestra la existencia y al mismo tiempo se da el método de formación de un conjunto fundamental de soluciones.

Naturalmente, si en un sistema de desigualdades dado hay un subsistema, para el cual podemos inmediatamente determinar el conjunto fundamental de soluciones, entonces en calidad de punto inicial se debe tomar este subsistema, agregando sucesivamente al cual las restantes desigualdades, después de una serie de operaciones obtenemos el conjunto fundamental requerido.

EJEMPLO. Para el sistema

$$\left.\begin{aligned} L_1(X) &= -3x_1 - 4x_2 + 5x_3 - 6x_4 \geqslant 0, \\ L_2(X) &= 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 + x_4 \geqslant 0, \end{aligned}\right\} \qquad (19)$$

es preciso hallar todas las soluciones no negativas, es decir, todas las soluciones que satisfacen las condiciones

$$\left.\begin{aligned} x_1 &\geqslant 0, \\ x_2 &\geqslant 0, \\ x_3 &\geqslant 0, \\ x_4 &\geqslant 0. \end{aligned}\right\} \qquad (20)$$

Mejor dicho, es preciso hallar la solución común para el sistema (19), (20).

No es difícil ver que para el sistema (20) el conjunto fundamental será el conjunto de los puntos

$$X_1 = (1,\ 0,\ 0,\ 0), \quad X_2 = (0,\ 1,\ 0,\ 0)$$
$$X_3 = (0,\ 0,\ 1,\ 0), \quad X_4 = (0,\ 0,\ 0,\ 1)$$

[efectivamente, cualquier solución $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ del sistema (20) puede expresarse en la forma $\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 X_3 + \alpha_4 X_4$]. Agregamos al sistema (20) la primera de las desigualdades (19) y para el sistema así obtenido, confeccionamos un conjunto fundamental de soluciones, utilizando el teorema del 5° apartado. Para comodidad de cálculos componemos la siguiente tabla

					$L_1(X)$
X_1	1	0	0	0	−3
X_2	0	1	0	0	−4
X_3	0	0	1	0	5
X_4	0	0	0	1	−6

En cada renglón de esta tabla se da uno de los puntos fundamentales para el sistema (20), así como el valor de la función $L_1(X)$ para este punto. Por la tabla vemos que el único punto del tipo X_α^+ es X_3; los puntos del tipo X_β^- son X_1, X_2, X_4; puntos del tipo X_γ^0 en este caso no hay.

Hallamos los puntos del tipo $X_{\alpha\beta}^0$. Que son:

$$X_{31}^0 = 3X_3 + 5X_1 = (5, 0, 3, 0),$$

$$X_{32}^0 = 4X_3 + 5X_2 = (0, 5, 4, 0).$$

$$X_{32}^0 = 6X_3 + 5X_4 = (0, 0, 6, 5).$$

Para no complicar la escritura, en lo sucesivo designaremos estos puntos por Y_1, Y_2, Y_4 (respectivamente), y en lugar de X_3 escribiremos Y_3.

Los puntos Y_3, Y_1, Y_2, Y_4 forman el conjunto fundamental de soluciones para un sistema compuesto por (20) y por la primera desigualdad de (19).

A dicho sistema agregamos la segunda desigualdad de (19) y componemos la siguiente tabla:

					$L_2(Y)$
Y_3	0	0	1	0	−3
Y_1	5	0	3	0	1
Y_2	0	5	4	0	3
Y_4	0	0	6	5	−13

En la tabla vemos que Y_1, Y_2 cumplen la función de los puntos Y_α^+; Y_3, Y_4, la de los puntos Y_β^-, mientras que puntos del tipo Y_γ^0 no hay.

Hallamos los puntos del tipo $Y_{\alpha\beta}^0$

$$Y_{13}^0 = 3Y_1 + Y_3 = (15,\ 0,\ 10,\ 0) = 5\,(3,\ 0,\ 2,\ 0),$$

$$Y_{23}^0 = 3Y_2 + 3Y_3 = (0,\ 15,\ 15,\ 0) = 5\,(0,\ 3,\ 3,\ 0),$$

$$Y_{14}^0 = 13Y_1 + Y_4 = (65,\ 0,\ 45,\ 5) = 5\,(13,\ 0,\ 9,\ 1),$$

$$Y_{24}^0 = 12Y_2 + 3Y_4 = (0, 65, 70, 15) = 5\,(0, 13, 14, 3).$$

Los puntos Y_1, Y_2, Y_{13}^0, Y_{23}^0, Y_{14}^0, Y_{24}^0 forman el conjunto fundamental de soluciones para el sistema (19), (20). La solución general tiene la forma

$$X = aY_1 + bY_2 + cY_{13}^0 + dY_{23}^0 + eY_{14}^0 + fY_{24}^0 =$$
$$= a(5,\ 0,\ 3,\ 0) + b(0,\ 5,\ 4,\ 0) + 5c\,(3,\ 0,\ 2,\ 0) +$$
$$+ 5d\,(0,\ 3,\ 3,\ 0) + 5e\,(13,\ 0,\ 9,\ 1) + 5f\,(0,\ 13,\ 14,\ 3),$$

siendo a, b, c, d, e, f cualesquiera números no negativos.

Si consideramos $a = k_1$, $b = k_2$, $5c = k_3$, $5d = k_4$, $5e = k_5$, $5f = k_6$, entonces obtenemos para X la representación

$$X = k_1\,(5,\ 0,\ 3,\ 0) + k_2\,(0,\ 5,\ 4,\ 0) + k_3\,(3,\ 0,\ 2,\ 0) +$$
$$+ k_4\,(0,\ 3,\ 3,\ 0) + k_5\,(13,\ 0,\ 9,\ 1) + k_6\,(0,\ 13,\ 14,\ 3), \quad (21)$$

siendo k_1, k_2, ..., k_6 números arbitrarios no negativos.

Para finalizar este punto, señalaremos que junto con la demostración de la existencia de un conjunto fundamental de soluciones para cualquier sistema homogéneo de desigualdades lineales, se demuestra también el teorema 2′ del párrafo 7 sobre la estructura de cualquier cono poliedro convexo (véase pág. 64).

§ 10. RESOLUCIÓN DE UN SISTEMA HETEROGÉNEO DE DESIGUALDADES

Ahora, cuando hemos aprendido a formar la solución común para un sistema homogéneo de desigualdades, no nos será difícil resolver un problema semejante con relación a un sistema de desigualdades arbitrario, es decir, heterogéneo.

Sea

$$\left.\begin{array}{l} a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n \geqslant a, \\ b_1x_1 + b_2x_2 + \ldots + b_nx_n \geqslant b, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \geqslant c, \end{array}\right\} \qquad (1)$$

un sistema arbitrario de desigualdades lineales con n incógnitas $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Examinemos junto con él el sistema homogéneo

$$\left.\begin{array}{l} a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n - at \geqslant 0, \\ b_1x_1 + b_2x_2 + \ldots + b_nx_n - bt \geqslant 0, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n - ct \geqslant 0, \end{array}\right\} \qquad (2)$$

con $n + 1$ incógnitas $x_1, x_2, \ldots, x_n, t$.

Entre las soluciones de los sistemas (1) y (2) existe una relación de determinado contenido. Precisamente, si $x_1, x_2, \ldots, x_n, t$ es una solución cualquiera del sistema (2) y, además, $t > 0$, entonces los números

$$\tilde{x}_1 = \frac{x_1}{t}, \quad \tilde{x}_2 = \frac{x_2}{t}, \ldots, \tilde{x}_n = \frac{x_n}{t} \qquad (3)$$

serán solución del sistema (1).

En efecto, veamos, por ejemplo, la primera desigualdad de (2). Ésta se cumple para los números $x_1, x_2, \ldots, x_n, t$, o sea,

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n \geqslant at.$$

Dividiendo los dos miembros de esta desigualdad por el número positivo t, tendremos

$$a_1\tilde{x}_1 + a_2\tilde{x}_2 + \ldots + a_n\tilde{x}_n \geqslant a,$$

pero esto significa que el conjunto de números $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n$ satisface la primera desigualdad de (1). Un cálculo semejante puede realizarse con respecto a cualquier desigualdad de (2); de aquí, pues, se deduce nuestra afirmación.

No es difícil observar que cualquier solución del sistema (1) puede ser obtenida por el método indicado. En efecto, si $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n$ es una solución cualquiera del sistema (1), entonces los números $x_1 = \tilde{x}_1, x_2 = \tilde{x}_2, \ldots, x_n = \tilde{x}_n, t = 1$ satisfacen el sistema (2) y en este caso son válidas las igualdades (3).

Así, pues, para hallar todas las soluciones $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n$ del

sistema (1), se deben hallar todas las soluciones del sistema (2), para las cuales $t > 0$, y transformar cada una de ellas conforme a las fórmulas (3).

EJEMPLO. Supongamos que es preciso hallar todas las soluciones del sistema

$$\left.\begin{aligned} -3x_1 - 4x_2 + 5x_3 &\geqslant 6,\\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 &\geqslant -1,\\ x_1 &\geqslant 0,\\ x_2 &\geqslant 0,\\ x_3 &\geqslant 0. \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Procediendo de la forma indicada, formamos el sistema homogéneo auxiliar

$$\left.\begin{aligned} -3x_1 - 4x_2 + 5x_3 - 6t &\geqslant 0,\\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 + t &\geqslant 0,\\ x_1 &\geqslant 0,\\ x_2 &\geqslant 0,\\ x_3 &\geqslant 0. \end{aligned}\right\}$$

Agregando a este sistema la desigualdad $t \geqslant 0$ (puesto que nos interesan solamente las soluciones, para las cuales $t > 0$), obtenemos el sistema (19), (20) del párrafo 9, con la única diferencia, que en lugar de x_4 tenemos t. El conjunto de soluciones de este sistema, como demuestra el párrafo 9 [véase (21) en el párrafo 9] se expresa mediante las fórmulas

$$\begin{aligned} x_1 &= 5k_1 + 3k_3 + 13k_5,\\ x_2 &= 5k_2 + 3k_4 + 13k_6,\\ x_3 &= 3k_1 + 4k_2 + 2k_3 + 3k_4 + 9k_5 + 14k_6,\\ t &= k_5 + 3k_6, \end{aligned}$$

siendo $k_1, k_2, \ldots, k_6$ cualesquiera números no negativos. Como nos interesan solamente las soluciones, para las cuales $t > 0$, entonces debemos considerar que por lo menos uno de los números k_5, k_6 es diferente de cero (estrictamente positivo). A continuación hallamos la solucion común para el sistema (4) por las fórmulas

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{5k_1 + 3k_3 + 13k_5}{k_5 + 3k_6}, \\ x_2 &= \frac{3k_2 + 3k_4 + 13k_6}{k_5 + 3k_6}, \\ x_3 &= \frac{3k_1 + 4k_2 + 2k_3 + 3k_4 + 9k_5 + 14k_6}{k_5 + 3k_6}. \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Señalamos una vez más que en estas fórmulas $k_1, k_2, \ldots, k_6$ son cualesquiera números no negativos, además, por lo menos uno de los números k_5, k_6 es diferente de cero.

Al establecer que la resolución del sistema (1) por el método indicado anteriormente se reduce a la resolución del sistema homogéneo (2), de hecho, hemos demostrado el teorema 3 del párrafo 7 sobre la estructura de cualquier región poliédrica convexa. Lo ilustraremos, tomando como ejemplo, el sistema (4). Sea

$$k'_i = \frac{k_i}{k_5 + 3k_6} \quad (i = 1, 2, 3, 4);$$

como los números k_1, k_2, k_3, k_4 son arbitrarios no negativos, entonces también los números k'_1, k'_2, k'_3, k'_4 son arbitrarios no negativos. Seguidamente suponemos que

$$k'_5 = \frac{k_5}{k_5 + 3k_6}, \quad k'_6 = \frac{3k_6}{k_5 + 3k_6};$$

los números k'_5 y k'_6 no son negativos y están relacionados por la condición $k'_5 + k'_6 = 1$. Ahora las fórmulas (5) pueden ser expresadas en forma de una sola igualdad

$$(x_1, x_2, x_3) = k'_1(5, 0, 3) + k'_2(0, 5, 4) + + k'_3(3, 0, 2) + \\ + k'_4(0, 3, 3) + k'_5(13, 0, 9) + k'_6\left(0, \frac{13}{3}, \frac{14}{3}\right). \quad (6)$$

Introducimos las siguientes designaciones:

$$X_1 = (5, 0, 3), \quad X_2 = (0, 5, 4), \quad X_3 = (3, 0, 2),$$
$$X_4 = (0, 3, 3), \quad X_5 = (13, 0, 9),$$
$$X_6 = \left(0, \frac{13}{3}, \frac{14}{3}\right).$$

Teniendo en cuenta las restricciones establecidas anteriormente para k'_1, k'_2, k'_3 y k'_4 y también para k'_5 y k'_6, ahora podemos interpretar la igualdad (6) de la siguiente forma: el conjunto de soluciones del sistema (4) es $(X_1, X_2, X_3, X_4) + \langle X_5, X_6 \rangle$. Con ello, la afirmación formulada en el teorema 3 del párrafo 7, queda demostrada para el sistema (4).

§ 11. SISTEMAS INCOMPATIBLES

Hasta el momento nos hemos interesado preferentemente por aquellos sistemas de desigualdades que tienen por lo menos una solución (son compatibles). Con respecto a los sistemas incompatibles, su estudio representa, a primera vista, una ocupación innecesaria; además, parece poco real que con sistemas semejantes se pueda crear una teoría, sobre algo más o menos, sustancial. De hecho, la situación es completamente otra: las propiedades de los sistemas incompatibles no solamente representan interés como tales, sino que nos abren la posibilidad para comprender una serie de hechos importantes. Así, por ejemplo, el teorema fundamental de la programación lineal (teorema sobre la dualidad, véase párrafo 15) se demuestra, a fin de cuentas, mediante algunas propiedades de sistemas incompatibles.

Examinemos un sistema arbitrario de desigualdades lineales. Para comodidad de escritura, de momento consideraremos que el número de incógnitas es igual a tres, aunque todo lo expuesto se refiere en igual medida a sistemas con cualquier número de incógnitas.

Así, pues, tenemos el sistema

$$\left.\begin{array}{l} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 \geqslant 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 \geqslant 0, \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_mx + b_my + c_mz + d_m \geqslant 0. \end{array}\right\} \qquad (1)$$

Multipliquemos los dos miembros de la primera desigualdad de (1) por un número cualquiera no negativo k_1, los dos miembros de la segunda, por un número no negativo k_2 y así sucesivamente; sumemos después las desigualdades obtenidas. Como resultado llegamos a la desigualdad

$$(k_1a_1 + k_2a_2 + \dots + k_ma_m)\,x + (k_1b_1 + k_2b_2 + \dots + k_mb_m)\,y + \\ + (k_1c_1 + k_2c_2 + \dots + k_mc_m)\,z + k_1d_1 + k_2d_2 + \dots \\ \dots + k_md_m \geqslant 0, \qquad (2)$$

la cual llamaremos *combinación de las desigualdades* (1).

Puede resultar que cierta combinación de las desigualdades (1) representa una desigualdad de la forma

$$0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z + d \geqslant 0, \qquad (3)$$

siendo d un número estrictamente negativo (después de dividir por $|d|$ obtenemos la desigualdad $-1 \geqslant 0$). Está claro que esta desigualdad no podrá satisfacer ningún conjunto de valores de las incógnitas, por lo tanto, en el caso que analizamos el sistema (1) es incompatible (no tiene soluciones). Es interesante que también la afirmación inversa es justa, a saber: si el sistema (1) es incompatible, entonces cierta combinación de sus desigualdades tendrá la forma (3), siendo $d < 0$.

Ahora demostraremos esta afirmación en forma general (o sea, para sistemas con cualquier número de incógnitas), pero antes introduciremos la siguiente *definición.* Acordemos denominar la desigualdad

$$ax + by + cz + d \geqslant 0$$

por *contradictoria,* si no la satisface ningún conjunto de valores de las incógnitas. Es evidente que cualquier desigualdad contradictoria tiene la forma (3), siendo $d < 0$ (¡demuéstrelo!). La afirmación que debemos demostrar, puede ser ahora formulada por el siguiente teorema.

TEOREMA SOBRE SISTEMAS INCOMPATIBLES DE DESIGUALDADES. *Si un sistema de desigualdades lineales es incompatible, entonces cierta combinación de estas desigualdades es una desigualdad contradictoria.*

DEMOSTRACIÓN. La efectuamos por el método de inducción por n-ésimo número de incógnitas para nuestro sistema.

Siendo $n = 1$, dicho sistema tiene la forma

$$\left.\begin{array}{l} a_1x + b_1 \geqslant 0, \\ a_2x + b_2 \geqslant 0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_mx + b_m \geqslant 0. \end{array}\right\} \qquad (4)$$

Se puede considerar que todos los coeficientes $a_1, a_2, \ldots, a_m$ son distintos de cero. En efecto, si, por ejemplo, $a_1 = 0$, entonces la primera desigualdad tendrá la forma $0 \cdot x + b_1 \geqslant 0$; siendo el número b_1 no negativo esta desigualdad puede ser suprimida; siendo b_1 un número negativo, la primera desigualdad de nuestro sistema es contradictoria y no tendremos qué demostrar.

Así, consideremos que ningún número $a_1, a_2, \ldots, a_m$ es igual a cero. Es fácil observar que entre estos números forzosamente tiene que haberlos tanto positivos, como negativos; en efecto, si todos los números indicados tuviesen un mismo signo, por ejem-

plo, fuesen positivos, entonces el sistema (4) se reduciría a la forma

$$\left.\begin{array}{l} x \geqslant -\dfrac{b_1}{a_1}, \\ x \geqslant -\dfrac{b_2}{a_2}, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x \geqslant -\dfrac{b_m}{a_m}, \end{array}\right\}$$

y, por consiguiente, sería compatible.

Supongamos, para precisar, que los primeros k números de $a_1, a_2, \ldots, a_m$ son positivos, mientras que los restantes $m-k$ son negativos. Entonces el sistema (4) es equivalente al sistema

$$\left.\begin{array}{l} \boxed{\begin{array}{l} x \geqslant -\dfrac{b_1}{a_1}, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x \geqslant -\dfrac{b_k}{a_k}, \end{array}} \\ \boxed{\begin{array}{l} x \leqslant -\dfrac{b_{k+1}}{a_{k+1}}, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x \leqslant -\dfrac{b_m}{a_m}. \end{array}} \end{array}\right\} \qquad (5)$$

Elegimos entre los números $-\dfrac{b_1}{a_1}, \ldots, -\dfrac{b_k}{a_k}$ el máximo; supongamos, por ejemplo, que dicho número es $-\dfrac{b_1}{a_1}$. Entonces, en el sistema (5) las primeras k desigualdades pueden ser reemplazadas por la primera desigualdad. De forma análoga elegimos entre los números $-\dfrac{b_{k+1}}{a_{k+1}}, \ldots, -\dfrac{b_m}{a_m}$ el mínimo, entonces las restantes $m-k$ desigualdades del sistema (5) pueden ser reemplazadas por la última desigualdad. Así, pues, el sistema (4) es equivalente

a un sistema de dos desigualdades:

$$x \geqslant -\frac{b_1}{a_1},$$

$$x \leqslant -\frac{b_m}{a_m},$$

y su incompatibilidad significa que

$$-\frac{b_1}{a_1} > -\frac{b_m}{a_m^n}. \tag{6}$$

De (6) se deduce que

$$b_m a_1 - b_1 a_m < 0, \tag{7}$$

(hay que tener en cuenta que $a_1 > 0$ y $a_m < 0$). Si multiplicamos ahora la primera desigualdad de (4) por un número positivo $-a_m$ y la última, por un número positivo a_1, y después sumamos, tendremos la desigualdad

$$0 \cdot x + (b_m a_1 - b_1 a_m) \geqslant 0, \tag{8}$$

la cual según (7) es contradictoria. Así, pues, para sistemas con una incógnita el teorema es válido.

Supongamos ahora que la afirmación del teorema es válida para sistemas de desigualdades con $n - 1$ incógnitas y, basándonos en esta suposición demostraremos que dicha afirmación es válida para el caso de n incógnitas.

Entonces, sea dado un sistema incompatible de desigualdades lineales con n incógnitas $x_1, x_2, \ldots, x_n$; ateniéndonos a las designaciones dadas en el párrafo 8 designamos este sistema por "sistema (S)". Formamos para él un sistema asociado (S'); este último será incompatible seguidamente después de (S). Como en el sistema (S') el número de incógnitas es igual a $n - 1$, con respecto a este sistema puede aplicarse la suposición de inducción. Esto significa que cierta combinación de desigualdades del sistema (S') representa una desigualdad contradictoria. Pero no es difícil ver que cada desigualdad del sistema (S') es una combinación de desigualdades del sistema (S): en efecto, si simplemente sumamos las desigualdades $P_\alpha \geqslant x_n$ y $x_n \geqslant Q_\beta$ del sistema (S), obtenemos $P_\alpha + x_n \geqslant x_n + Q_\beta$, o bien, $P_\alpha \geqslant Q_\beta$, es decir, una de las desigualdades del sistema (S') [véase el § 8, sistemas (T) y (S')]. De esto, a su vez, se deduce que cierta combinación de desigualdades del

sistema inicial (S) es una desigualdad contradictoria. El teorema queda demostrado.

El teorema sobre sistemas incompatibles de desigualdades lineales es solamente una de las manifestaciones de la profunda analogía, existente entre las propiedades de sistemas de desigualdades lineales y de *sistemas de ecuaciones lineales*. Si probamos cambiar, en la formulación del teorema, la palabra "desigualdad" por "ecuación" tendremos la siguiente afirmación:

Si un sistema de ecuaciones lineales es incompatible, entonces cierta combinación de dichas ecuaciones es una ecuación contradictoria.

Resulta que *esta afirmación también es justa*. Con una formulación algo distinta, dicha afirmación se llama *teorema de Kronecker – Capelli* y se demuestra en el curso de *álgebra lineal* (así se llama una parte de las matemáticas, en la cual se estudian las operaciones lineales, o sea, operaciones semejantes a la adicción de puntos y multiplicación de puntos por un número en un espacio n-dimensional). Además, para que lo dicho sea comprendido correctamente, es preciso hacer algunas precisiones sobre el concepto de "combinación". Una combinación de ecuaciones se confecciona de la misma forma que una combinación de desigualdades, con la única diferencia que se permite multiplicar estas ecuaciones *por cualesquiera* números y no solamente por números no negativos. Lo mismo que para desigualdades, la ecuación que no tiene soluciones se llama contradictoria. No será difícil demostrar que las ecuaciones contradictorias forzosamente tienen que tener la forma.

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n + b = 0, \qquad (9)$$

siendo b un número diferente de cero (después de dividir los dos miembros por b obtenemos la "ecuación" $1 = 0$).

Sumamente importante es un caso particular del teorema sobre sistemas incompatibles de desigualdades, precisamente, cuando el sistema dado contiene las desigualdades

$$x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0, \ \ldots, \ x_n \geqslant 0. \qquad (10)$$

Designando por (S) la parte restante del sistema, se puede decir que el problema consiste en hallar todas las soluciones *no negativas* del sistema (S) [o sea, soluciones que satisfagan las condiciones (10)]. Si este problema no tiene soluciones, entonces, conforme al teorema que acabamos de demostrar, cierta combinación de

desigualdades del sistema (S),

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n + a \geqslant 0, \qquad (11)$$

en suma con cierta combinación de las desigualdades (10),

$$k_1x_1 + k_2x_2 + \ldots + k_nx_n \geqslant 0$$

$$(k_1,\ k_2,\ \ldots,\ k_n \text{ no son negativos}),$$

dará una desigualdad contradictoria

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n + c \geqslant 0,$$

siendo c un número negativo. Por consiguiente,

$$a_1 = -k_1 \leqslant 0, \quad a_2 = -k_2 \leqslant 0, \ \ldots, \ a_n = -k_n \leqslant 0, \ a < 0.$$

Formulemos el resultado obtenido como una afirmación particular.

COROLARIO DEL TEOREMA SOBRE SISTEMAS INCOMPATIBLES. *Si un sistema de desigualdades carece de soluciones no negativas, entonces cierta combinación de dichas desigualdades es una desigualdad de la forma (11), en la que todos los coeficientes* $a_1, a_2, \ldots, a_n \leqslant 0$ *y el término independiente* $a < 0$.

§ 12. CONOS POLIEDROS CONVEXOS RECÍPROCAMENTE CONJUGADOS

En el párrafo 4 hemos expuesto algunos hechos referentes a conos poliedros convexos; en el presente párrafo examinaremos hechos complementarios de la teoría de los conos convexos.

Cada cono poliedro convexo con el vértice en el origen de las coordenadas en un espacio tridimensional, conforme se demuestra anteriormente, es una región de soluciones de cierto sistema de desigualdades homogéneas lineales con tres incógnitas:

$$\left.\begin{array}{l} a_1x + b_1y + c_1z \geqslant 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z \geqslant 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_mx + b_my + c_mz \geqslant 0. \end{array}\right\} \qquad (1)$$

Supongamos que además de este sistema se da una desigualdad aparte

$$ax + by + cz \geqslant 0. \qquad (2)$$

Consideramos que la desigualdad (2) es *consecuencia* del sistema (1), si cualquier conjunto de valores de las incógnitas x, y, z que satisface el sistema (1), satisface también la desigualdad (2).

Naturalmente, cualquier desigualdad, siendo una combinación lineal de las desigualdades (1), es consecuencia del sistema (1). Pero, ¿es válido lo inverso? Resulta que sí.

TEOREMA 1. *La desigualdad homogénea* (2), *siendo consecuencia del sistema homogéneo* (1), *puede ser representada como una combinación lineal de las desigualdades* (1).

DEMOSTRACIÓN. Para comodidad de escritura, en lo sucesivo, designaremos los primeros miembros de la primera, segunda, ..., m-ésima desigualdades del sistema (1) por $P_1 P_2, \ldots, P_m$ respectivamente, y el primer miembro de la desigualdad (2), por P. Así, pues, tenemos dado el sistema

$$\left.\begin{array}{r} P_1 \geqslant 0, \\ P_2 \geqslant 0, \\ \cdots\cdots \\ P_m \geqslant 0. \end{array}\right\} \quad (1)$$

y también la desigualdad

$$P \geqslant 0, \quad (2)$$

que es consecuencia del sistema. Es preciso demostrar que esta desigualdad puede ser expresada como una combinación lineal de las desigualdades (1).

Puesto que la desigualdad $P \geqslant 0$ es una consecuencia del sistema (1), entonces la desiguladad $P \leqslant -1$, por el contrario, es incompatible con este sistema; es decir, el sistema mixto

$$\left.\begin{array}{r} P_1 \geqslant 0, \\ P_2 \geqslant 0, \\ \cdots\cdots \\ P_m \geqslant 0, \\ -P-1 \geqslant 0, \end{array}\right\}$$

es incompatible.

Conforme al teorema sobre sistemas incompatibles, cierta combinación lineal de las desigualdades (3) es una desigualdad contradictoria. En otras palabras, existen unos números no negativos

$k_1, k_2, \ldots, k_m, k_{m+1}$ tales, que la desigualdad

$$k_1P_1 + k_2P_2 + \ldots + k_mP_m + k_{m+1}(-P-1) \geqslant 0$$

(después de una reducción de los términos semejantes) tendrá la forma

$$0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z + d \geqslant 0,$$

donde d es un número negativo. Por consiguiente,

$$k_1P_1 + k_2P_2 + \ldots + k_mP_m - k_{m+1}P = 0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z,$$

y $-k_{m+1} = d$ es un número negativo. De ello resulta que

$$P = \frac{k_1}{k_{m+1}} P_1 + \ldots + \frac{k_m}{k_{m+1}} P_m,$$

además, los factores de $P_1, \ldots, P_m$ no son negativos. Por lo visto, esto significa que la desigualdad (2) es una combinación lineal de las desigualdades (1); esto, pues, era preciso demostrar.

El teorema demostrado representa interés como tal, pero más curioso es su contenido geométrico. Para dárselo a conocer a nuestro lector, tendremos que valernos de algunos hechos de la geometría analítica; por cierto que éstos son tan elementales, como los pocos hechos de la geometría analítica que venimos utilizando hasta aquí.

Sean

$$A(x_A, y_A, z_A), \quad B(x_B, y_B, z_B),$$

dos puntos en el espacio diferentes del origen de las coordenadas O. Apliquemos con relación al triángulo OAB (fig. 47) el así llamado "teorema de los cosenos", conforme al cual, el cuadrado de cualquier lado de un triángulo es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados menos el producto doble de estos lados por el coseno del ángulo entre ellos.

En el caso dado

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2 \cdot OA \cdot OB \cdot \cos\varphi, \quad (4)$$

siendo φ un ángulo entre los segmentos OA y OB. Pero

$$OA^2 = x_A^2 + y_A^2 + z_A^2,$$
$$OB^2 = x_B^2 + y_B^2 + z_B^2,$$
$$AB^2 = (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2,$$

o sea que después de reducir los términos semejantes, obtenemos

de (4)

$$-2(x_A x_B + y_A y_B + z_A z_B) = -2 \cdot OA \cdot OB - \cos\varphi. \qquad (5)$$

El ángulo φ será no agudo en aquel y sólo en aquel caso, cuando $\cos\varphi \leqslant 0$. Por lo tanto también de (5) se deduce que *el ángulo entre los segmentos OA y OB será no agudo en aquel y sólo en aquel caso, cuando*

$$x_A x_B + y_A y_B + z_A z_B \leqslant 0.$$

Acordaremos, en adelante designar la expresión que forma el primer miembro de esta desigualdad, brevemente, por (A, B):

$$(A, B) = x_A x_B + y_A y_B + z_A z_B.$$

Entonces, lo dicho anteriormente se puede parafrasear de la siguiente forma.

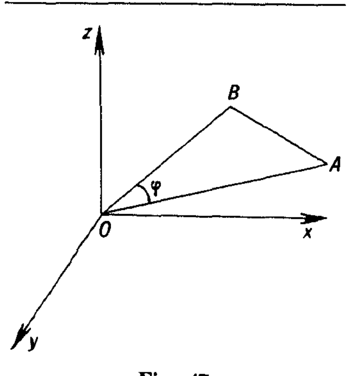


Fig. 47.

El ángulo entre los segmentos OA y OB será no agudo en aquel y sólo en aquel caso, cuando

$$(A, B) \leqslant 0.$$

Precisamente, estos son todos los conocimientos de la geometría analítica que necesitamos en lo sucesivo. Para finalizar, señalaremos una propiedad de la magnitud (A, B):

$$(k_1 A_1 + k_2 A_2, B) = k_1 (A_1, B) + k_2 (A_2, B) \qquad (6)$$

sean cuales sean los números k_1 y k_2. La demostración es casi

evidente: puesto que el punto $k_1A_1 + k_2A_2$ tiene las coordenadas

$$k_1x_{A_1} + k_2x_{A_2}, \quad k_1y_{A_1} + k_2y_{A_2},$$
$$k_1z_{A_1} + k_2z_{A_2},$$

entonces

$$(k_1A_1 + k_2A_2, B) =$$
$$= (k_1x_{A_1} + k_2x_{A_2})x_B + (k_1y_{A_1} + k_2y_{A_2})y_B +$$
$$+ (k_1z_{A_1} + k_2z_{A_2})z_B = k_1(x_{A_1}x_B + y_{A_1}y_B + z_{A_1}z_B) +$$
$$+ k_2(x_{A_2}x_B + y_{A_2}y_B + z_{A_2}z_B) = k_1(A_1, B) + k_2(A_2, B).$$

Por fin nos dirigimos al tema principal de este párrafo, o sea, a los conos poliedros convexos situados en el espacio. Según la definición dada en el párrafo 4, cono poliedro convexo con el vértice en el punto S se llama la intersección de un número finito de semiespacios, cuyos planos confines pasan por S. El ejemplo más típico de cono poliedro convexo, como es sabido, es una pirámide convexa ilimitada. En lo que queda de este párrafo, se supone que el vértice S coincide con el origen de las coordenadas O.

Supongamos que el punto B, distinto del origen de las coordenadas, tiene la siguiente propiedad: el segmento OB forma un ángulo no agudo con cualquiera de los segmentos OA, siendo A un punto arbitrario del cono considerado $\mathscr{K}$. Un punto tal B siempre puede hallarse: para ello es suficiente, por ejemplo, trazar un plano π a través del vértice del cono, de tal forma, que todo el cono se sitúe en uno de los dos semiespacios, determinados por este plano (fig. 48); entonces una perpendicular al plano π, trazada en el otro semiespacio, estará compuesta totalmente por puntos B de la forma requerida.

Examinemos el conjunto de *todos* los puntos B que poseen la propiedad antes indicada; completamos dicho conjunto con un punto más – el origen de las coordenadas – y designamos el conjunto obtenida por $\mathscr{K}^*$. Demostraremos, primeramente, que es válido el siguiente.

LEMA. $\mathscr{K}^*$ *es nuevamente un cono convexo poliedro* (como ilustración véase la fig. 49).

DEMOSTRACIÓN. Conforme al teorema 2 del párrafo 4, cualquier cono convexo poliedro $\mathscr{K}$ es un conjunto de la forma $(A_1, A_2, \ldots, A_m)$ (en el teorema indicado las designaciones son algo distintas: en lugar de $A_1, A_2, \ldots, A_m$ en él se da $B_1, B_2, \ldots, B_q$).

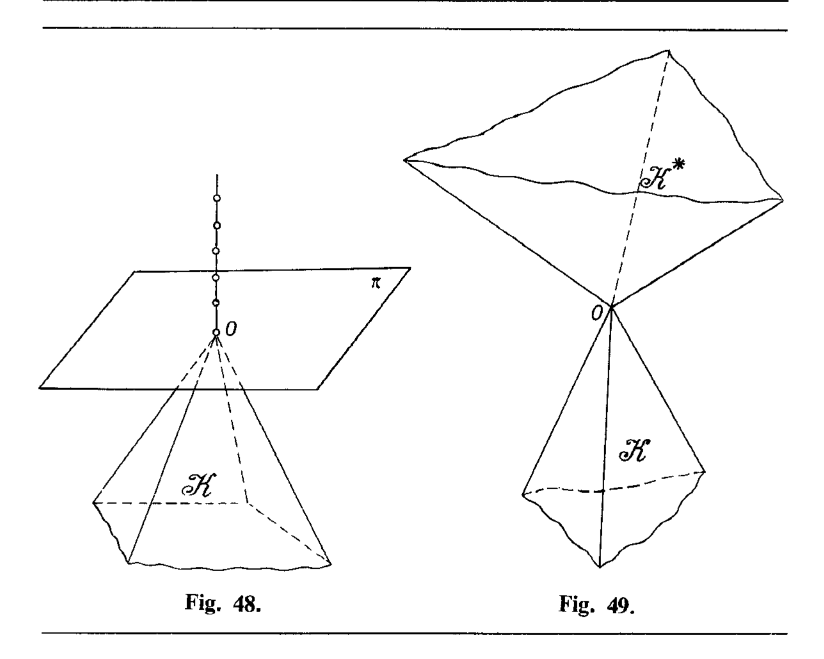


Fig. 48. Fig. 49.

Esto significa que cualquier punto $A \in \mathcal{K}$ se expresa de la forma

$$A = t_1A_1 + t_2A_2 + \ldots + t_mA_m,$$

siendo $t_1, t_2, \ldots, t_m$ números no negativos. Si el punto B pertenece al conjunto $\mathcal{K}^*$, entonces el ángulo entre el segmento OB y cualquiera de los segmentos OA $(A \in \mathcal{K})$ no es agudo, es decir

$$(A, B) \leqslant 0, \quad \text{para todos} \quad A \in \mathcal{K}.$$

Puesto que

$$(A, B) = t_1(A_1, B) + t_2(A_2, B) + \ldots + t_m(A_m, B)$$

[véase la fórmula (6)], entonces tenemos en este caso

$$t_1(A_1, B) + t_2(A_2, B) + \ldots + t_m(A_m, B) \leqslant 0, \qquad (7)$$

sean cuales sean los números no negativos $t_1, t_2, \ldots, t_m$. En particular,

$$(A_1, B) \leqslant 0, \quad (A_2, B) \leqslant 0, \; \ldots, \; (A_m, B) \leqslant 0. \qquad (8)$$

Y también a la inversa: si son válidas las desigualdades (8),

entonces también será válida (con cualesquiera no negativos t_1, $t_2, \ldots, t_m$) la desigualdad (7), es decir, el punto $B \in \mathscr{K}^*$. Así, pues, *el cumplimiento de las desigualdades* (8) *es lo indispensable y suficiente para que el punto B pertenezca a* $\mathscr{K}^*$.

Designemos las coordenadas del punto A_i por a_i, b_i, c_i ($i = 1, 2, \ldots, m$) y las coordenadas del punto B, por x, y, z. Entonces las condiciones (8) se escribirán de la siguiente forma

$$\left.\begin{array}{l} a_1x + b_1y + c_1z \leqslant 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z \leqslant 0, \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_mx + b_my + c_mz \leqslant 0. \end{array}\right\} \qquad (9)$$

Para que B pertenezca al conjunto $\mathscr{K}^*$ es indispensable y suficiente que sus coordenadas x, y, z satisfagan todos las desigualdades (9). Es decir, que $\mathscr{K}^*$ *sea región de soluciones del sistema* (9).

Como el sistema (9) es homogéneo, la región de sus soluciones es cierto cono poliedro convexo, situado en el espacio. Por consiguiente, $\mathscr{K}^*$ es un cono poliedro convexo; esto era preciso demostrar.

Así pues, *hemos aprendido a relacionar cada cono poliedro convexo* $\mathscr{K}$ *con otro cono poliedro convexo* $\mathscr{K}^*$; *este último está compuesto por todos los puntos B, en los cuales el segmento OB forma ángulos no agudos con cualquiera de los segmentos OA, en los que* $A \in \mathscr{K}$.

Diremos que el cono $\mathscr{K}^*$ es conjugado con $\mathscr{K}$.

Surge una pregunta lógica: ¿qué representa un cono conjugado con $\mathscr{K}^*$?, o sea, ¿qué se puede decir con respecto al conjunto $(\mathscr{K}^*)^*$? Por la definición dada al cono $\mathscr{K}^*$ se desprende directamente que el conjunto $(\mathscr{K}^*)^*$ debe contener el conjunto inicial $\mathscr{K}$ (¿por qué?).

Pero no está del todo claro, ¿coincidirán estos dos conjuntos o no? Más aún, intentando comprobar este hecho mediante razonamientos geométricos, nos convencemos de que éste no es tan simple. Sea como sea, nosotros eligiremos para demostrar la coincidencia entre $(\mathscr{K}^*)^*$ y $\mathscr{K}$ el camino algebraico, basado en el teorema 1; de hecho, como veremos por la demostración dada a continuación, el contenido geométrico del teorema 1, para el caso de un sistema con tres incógnitas, consiste precisamente en la igualdad $(\mathscr{K}^*)^* = \mathscr{K}$.

Así pues, demostremos el siguiente teorema.

TEOREMA 2. Sea $\mathcal{K}$ un cono poliedro convexo. Entonces el conjunto $(\mathcal{K}^*)^*$ coincide con $\mathcal{K}$.

Lo mismo se puede decir de otra forma, quizás, más clara. Designemos el cono $\mathcal{K}$ por $\mathcal{K}_1$ y el cono $\mathcal{K}^*$, por $\mathcal{K}_2$. Está claro que el teorema afirma lo siguiente:

$$\text{si } \mathcal{K}_1^* = \mathcal{K}_2, \quad \text{entonces } \mathcal{K}_2^* = \mathcal{K}_1,$$

o bien: si un cono es conjugado a otro, entonces el segundo también es conjugado al primero o sea, la relación de conjugación es recíproca.

DEMOSTRACIÓN. Sea $C(a, b, c)$ un punto arbitrario del conjunto $(\mathcal{K}^*)^*$. Para cada punto $B(x, y, z) \in \mathcal{K}^*$ debe cumplirse la desigualdad $(B, C) \leqslant 0$, es decir,

$$ax + by + cz \leqslant 0. \tag{10}$$

Pero la propia pertenencia del punto B al conjunto $\mathcal{K}^*$ significa, como decíamos antes, el cumplimiento de la desigualdad (9). De tal forma, cada solución (x, y, z) del sistema (9) deberá satisfacer también la desigualdad (10). En otras palabras, *la desigualdad* (10) *es consecuencia del sistema* (9).

Por el teorema 1, demostrado anteriormente, esto es posible solamente en el caso, cuando la desigualdad (10) es una combinación lineal de la desigualdad (9), es decir, cuando

$$(a, b, c) = t_1(a_1, b_1, c_1) + t_2(a_2, b_2, c_2) + \ldots + t_m(a_m, b_m, c_m),$$

siendo $t_1, t_2, \ldots, t_m$ ciertos números no negativos.

Mas esta última igualdad significa que

$$C = t_1A_1 + t_2A_2 + \ldots + t_mA_m,$$

o sea, el punto C pertenece al cono $\mathcal{K}$. Así pues, cualquier punto C, perteneciente a $(\mathcal{K}^*)^*$, pertenece también a $\mathcal{K}$. Pero antes hemos señalado lo inverso, o sea, que $\mathcal{K}$ pertenece a $(\mathcal{K}^*)^*$. Por consiguiente, $\mathcal{K} = (\mathcal{K}^*)^*$. El teorema queda demostrado.

Utilizando los hechos ya conocidos por nosotros, ahora no será difícil demostrar el teorema 2, dado en el párrafo 7, sobre la estructura de los conos poliedros convexos. Recordaremos el contenido de este teorema: cualquier conjunto de la forma $(A_1, A_2, \ldots, A_m)$ es un cono poliedro convexo.

Para realizar la demostración examinaremos el conjunto $\mathcal{K} = (A_1, A_2, \ldots, A_m)^*$, compuesta (conforme a la definición) por aquellos puntos B, en los cuales el vector OB forma ángulos no agudos con todos los vectores OA, siendo A cualquier punto de

$(A_1, A_2, \ldots, A_m)$. El conjunto $\mathscr{K}$ se determina por las desigualdades (8) y, por lo tanto, es un cono poliedro convexo. Como cualquier otro cono poliedro convexo, $\mathscr{K}$ es cono conjugado con relación a cierto cono $\mathscr{L}$ (precisamente, con relación a $(\mathscr{K}^*)$. Pero, conforme a lo demostrado anteriormente (véase lo escrito en gallarda al final del párrafo 9) el cono $\mathscr{L}$ se expresa de la forma $(B_1, B_2, \ldots, B_s)$. O sea, $\mathscr{K} = \mathscr{L}^*$ o de otra forma,

$$(A_1, A_2, \ldots, A_m)^* = (B_1, B_2, \ldots, B_s)^* \qquad (11)$$

Basándose en el teorema 1 del presente párrafo, de la relación (11) es fácil deducir lo siguiente: cada uno de los puntos A_i pertenece al conjunto $(B_1, B_2, \ldots, B_s)$ y cada uno de los puntos B_j, a $(A_1, A_2, \ldots, A_m)$. De ello se deduce la coincidencia de los conjuntos $(A_1, A_2, \ldots, A_m)$ y $(B_1, B_2, \ldots, B_s)$. Por lo tanto el conjunto $(A_1, A_2, \ldots, A_m)$ es el cono $\mathscr{L}$. El teorema está demostrado.

§ 13. EL PROBLEMA DE LA PROGRAMACIÓN LINEAL

La programación lineal es una rama de las matemáticas aplicadas relativamente nueva, desarrollada en los años 40 a 50 de nuestro siglo al surgir la necesidad de resolver distintos problemas económicos.

Por regla general, los problemas con que tropezamos en la economía, y sobre todo en la rama de planificación de la producción, son los problemas relacionados con la búsqueda de *la variante más ventajosa.* Cada uno de estos problemas exige dar respuesta a la pregunta: ¿cómo obrar con los recursos limitados con que disponemos con el fin de obtener el máximo efecto? Hasta no hace mucho tiempo, el único método para resolver semejantes problemas era el simple cálculo, resolución "a ojo", o la prueba de todas las posibles variantes con el fin de hallar la mejor. Ahora la situación cambia. En los últimos decenios la complejidad de la producción ha alcanzado tal grado, que la simple prueba de variantes se ha hecho imposible. Son tantos los factores que influyen en la resolución, que la cantidad de variantes alcanza en algunos casos miles de millones. Por eso ha aumentado bruscamente el interés hacia los métodos matemáticos en la economía. Al proceso de "matematización de la economía" ha

contribuido también el desarrollo de la técnica de cálculo, en particular, la aparición de calculadoras electrónicas.

Examinaremos algunos ejemplos de problemas de la programación lineal.

EJEMPLO 1. Una empresa produce artículos de dos tipos; la capacidad de producción del taller de ajuste supone 100 artículos del primer tipo ó 300 artículos del segundo durante una jornada. Al mismo tiempo, la sección de control técnico está en condiciones de comprobar no más de 150 artículos (de cualquier tipo) durante una jornada. Se sabe, además, que un artículo del primer tipo es el doble más caro que un artículo del segundo. En estas condiciones, es preciso determinar un plan de producción (tantos artículos del primer tipo y tantos del segundo) que abastezca a la empresa el máximo de beneficio.

El plan que buscamos se da por medio de dos números enteros no negativos x e y (x es la cantidad de artículos del primer tipo e y, del segundo), los cuales deben satisfacer las siguientes condiciones *)

$$3x + y \leqslant 300; \quad x + y \leqslant 150;$$

$$2x + y \text{ es máximo.}$$

En otros términos, entre las soluciones no negativas de números enteros del sistema

$$\left.\begin{aligned} 3x + y &\leqslant 300, \\ x + y &\leqslant 150, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

es preciso elegir aquélla, que comunique máximo valor a la función lineal

$$f = 2x + y.$$

Si trazamos en un plano un sistema rectangular de coordenadas xOy, el conjunto de soluciones del sistema (1) estará representada por el polígono rayado en la fig. 50. Por esta misma figura se puede apreciar que la solución del problema es el punto $P(75, 75)$, uno de los vértices del polígono.

*) La primera condición parte del taller de ajuste. En efecto, en lugar de un artículo del primer tipo, este taller puede producir tres del segundo. Por consiguiente, toda la producción del taller, calculada en artículos del segundo tipo, supone $3x + y$ unidades; este número de unidades no deberá superar a 300.

En efecto, veamos la recta $2x + y = c$, en la que c es cierto número. Designemos esta recta por l_c. Con el crecimiento del número c, la recta l_c se desplaza hacia "arriba" (manteniéndose al mismo tiempo paralela a su posición inicial). El valor más grande de c, con el cual la recta l_c tiene aún puntos comunes con el polígono rayado, es aquel valor de c con el cual esta recta pasa por el punto P. Por lo tanto, en este punto, la función $2x + y$ alcanza su valor máximo (en comparación con sus valores en los demás puntos del polígono).

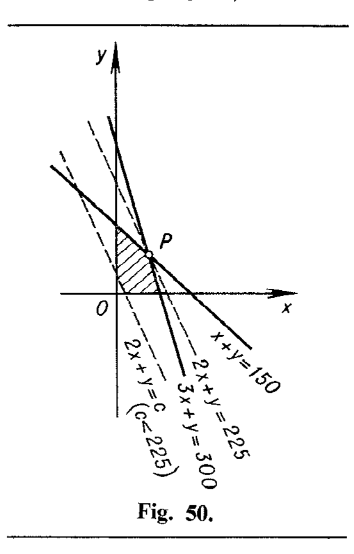


Fig. 50.

El ejemplo que hemos analizado, claro que es muy primitivo pero, de todos modos, nos da cierta idea sobre el carácter de los problemas de la programación lineal. En cada uno de estos problemas es preciso hallar el valor máximo (o mínimo) de cierta función lineal de n variables

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n,$$

con la condición que estas variables estén supeditadas a un sistema dado de desigualdades lineales (entre las cuales forzosamente va incluida la condición de que las variables $x_1 \geqslant 0, \ldots$ $\ldots, x_n \geqslant 0$ no sean negativas). En algunos problemas (como, por ejemplo, en el que hemos analizado) de las variables se exige una condición más: que sean números enteros.

EJEMPLO 2 (*problema sobre la dieta*). Entre las clases de productos

con que disponemos, es preciso componer tal dieta que, por un lado, abastezca las necesidades mínimas de un organismo en sustancias alimenticias (albúminas, grasas, carbohidratos, vitaminas, etc.) y, al mismo tiempo, exija gastos mínimos.

Veamos un simple modelo matemático de este problema.

Supongamos que tenemos dos clases de productos P_1 y P_2 que contienen sustancias alimenticias A, B y C. Se sabe qué cantidad de sustancias alimenticias contiene un kilogramo de uno y otro productos P_1 y P_2; estos datos se dan en la tabla

	A	B	C
en 1 kg de P_1	a_1	b_1	c_1
en 1 kg de P_2	a_2	b_2	c_2

Además de estos datos se sabe que a, b, c es lo que necesita un organismo durante 24 horas de A, B, C (respectivamente) y que s_1, s_2 son los precios de 1 kg de productos P_1 y P_2 (respectivamente). Es preciso determinar la cantidad x_1 del producto P_1 y la cantidad x_2 del producto P_2 de tal forma que se abastezca la cantidad indispensable de sustancias alimenticias con un mínimo de gastos en productos.

Naturalmente que el coste total de los productos será

$$S = s_1x_1 + s_2x_2.$$

La cantidad total de sustancia A en ambas clases de productos es igual a $a_1x_1 + a_2x_2$. Este cantidad no debe ser menor que a:

$$a_1x_1 + a_2x_2 \geqslant a.$$

Desigualdades análogas deberán cumplirse para B y C: $b_1x_1 + b_2x_2 \geqslant b$, $c_1x_1 + c_2x_2 \geqslant c$. Así pues, llegamos al siguiente problema.

Tenemos dado el sistema

$$\left.\begin{aligned} a_1x_1 + a_2x_2 \geqslant a, \\ b_1x_1 + b_2x_2 \geqslant b, \\ c_1x_1 + c_2x_2 \geqslant c, \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

de tres desigualdades lineales con dos incógnitas x_1 y x_2 y la

función lineal

$$S = s_1x_1 + s_2x_2.$$

Entre las soluciones no negativas (x_1, x_2) del sistema (2) es preciso elegir aquella solución, con la cual la función S alcanza su valor mínimo (se minimiza). A esquemas semejantes pueden ser reducidos diferentes problemas sobre la composición de aleaciones y mezclas de combustibles; problemas sobre la composición de piensos menos costosos para el ganado; sobre la composición de mezclas de abonos químicos, etc.

EJEMPLO 3 (*problema del transporte*). El carbón extraído de varios yacimientos, se envía a una serie de consumidores: fábricas, centrales eléctricas, etc. Se sabe cuánto carbón se extrae de cada yacimiento, digamos, durante un mes y cuánto carbón hace falta durante el mismo período para cada uno de los consumidores. Se conocen las distancias entre los yacimientos y los consumidores, así como las condiciones de transporte entre ellos; teniendo en cuenta estos datos, se puede calcular el precio de transporte de cada tonelada de carbón desde cualquier yacimiento hasta cualquier consumidor. Siendo estas las condiciones, es preciso planificar el transporte de carbón de tal forma que los gastos, relacionados con ello, sean mínimos.

Para simplificar, consideramos que hay solamente dos yacimientos M_1 y M_2 y tres consumidores P_1, P_2 y P_3. Supongamos que la cantidad de carbón en M_1 y M_2 es igual a a_1 y a_2 y la necesidad o consumo de P_1, P_2, P_3 igual a b_1, b_2, b_3 respectivamente. Admitimos que la suma de reservas se iguala a la suma de consumos

$$a_1 + a_2 = b_1 + b_2 + b_3;$$

tal suposición es completamente natural. Por último, tenemos dados los valores c_{ij} $(i = 1, 2; j = 1, 2, 3)$ que son precios de transporte de una tonelada de carbón desde M_i hasta P_j. El problema consiste en determinar seis números

$$x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23};$$

x_{ij} representa la cantidad de carbón, destinada para transportar desde M_i hasta P_j.

Para comodidad de observación componemos la siguiente tabla

	a P_1	a P_2	a P_3	Total enviado
De M_1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	a_1
De M_2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	a_2
Total	b_1	b_2	b_3	

La cantidad total de carbón transportado desde M_1 debe ser igual a a_1; de aquí tenemos la condición

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = a_1.$$

Una condición semejante deberá cumplirse para M_2:

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = a_2.$$

La cantidad total de carbón transportado hasta P_1 debe igualarse a b_1; de ello

$$x_{11} + x_{21} = b_1.$$

De forma análoga tenemos las condiciones:

$$x_{12} + x_{22} = b_2, \quad x_{13} + x_{23} = b_3.$$

Suponemos que el precio de transporte es directamente proporcional a la cantidad de carbón transportado, o sea, el transporte desde M_i hasta P_j cuesta $c_{ij}x_{ij}$. Entonces el precio total de todos los transportes será

$$S = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + c_{13}x_{13} + c_{21}x_{21} + c_{22}x_{22} + c_{23}x_{23}.$$

De tal forma llegamos al siguiente problema.

Tenemos dado el sistema

$$\left.\begin{aligned} x_{11} + x_{12} + x_{13} &= a_1, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} &= a_2, \\ x_{11} + x_{21} &= b_1, \\ x_{12} + x_{22} &= b_2, \\ x_{13} + x_{23} &= b_3, \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

de cinco igualdades lineales con seis incógnitas y la función lineal S. Entre las soluciones no negativas

$$x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23}$$

del sistema (3) es preciso elegir aquélla, con la cual la función S alcanza su valor mínimo (se minimiza).

El problema planteado claro que puede ser formulado en un aspecto más general, o sea, para cualquier número de yacimientos y consumidores. Este problema recibió el nombre de *problema del transporte* y fue uno de los primeros para cuya resolución se utilizaron, con éxito, métodos de la programación lineal.

Hemos analizado, de una forma simple, tres problemas de la programación lineal. A pesar de la variedad de contenido, en el planteamiento de estos problemas hay mucho en común. En cada problema se buscan valores de varias incógnitas, además, es preciso que:

a) estos valores sean no negativos;

b) estos valores satisfagan cierto sistema de ecuaciones lineales o desigualdades lineales;

c) con estos valores cierta función lineal sea mínima (o máxima).

Observaremos que el contenido de la condición b) parece más bien divisor que unificador, pues, en un caso las incógnitas deben satisfacer ecuaciones y en otro, desigualdades. Pero, más adelante veremos que un caso se reduce a otro fácilmente.

A problemas de este género se dedica la programación lineal. Dicho más exactamente: *la programación lineal es una disciplina de las matemáticas que estudia los métodos utilizados para hallar el valor mínimo (o máximo) de una función lineal con varias variables, con la condición que estas últimas satisfacen a un número finito de ecuaciones lineales y de desigualdades lineales.* La cantidad de variables y la cantidad de condiciones (ecuaciones, desigualdades) pueden ser, por supuesto, las que se quiera. En problemas reales estas cantidades son sumamente grandes (aproximadamente de una a varias decenas y a veces más).

Escribiremos lo dicho en el lenguaje exacto de las fórmulas. La formulación matemática general de un problema de la programación lineal se expresa como sigue.

Sea dado un sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{array}\right\} \qquad \text{(I)}$$

y la función lineal

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n. \qquad \text{(II)}$$

Es preciso hallar una tal solución no negativa

$$x_1 \geqslant 0 \quad x_2 \geqslant 0, \ldots, x_n \geqslant 0, \tag{III}$$

del sistema (I), *con la cual la función f adquiera su valor mínimo (se minimiza).*

Las ecuaciones (I) se llaman *restricciones* del problema dado. De hecho, las condiciones (III) también son restricciones pero no es usual llamarles así, ya que no son típicas para el problema *dado*, sino comunes para todos los problemas de la programación lineal.

De los tres ejemplos que hemos analizado, parece ser que sólo el último (el problema del transporte) se ajusta a la formulación que acabamos de dar. Los otros dos tienen un contenido algo distinto, puesto que todas las restricciones incluidas en ellos, tienen la forma de desigualdades y no de ecuaciones. No obstante, de restricciones-desigualdades a restricciones equivalentes, dadas en forma de ecuaciones, se puede pasar mediante un procedimiento simple.

En efecto, supongamos que entre las limitaciones de un problema dado hay una desigualdad

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n + b \geqslant 0. \tag{4}$$

Introducimos una incógnita nueva x_{n+1}, llamada *suplementaria o adicional*, relacionada con las incógnitas $x_1, x_2, \ldots, x_n$ mediante la ecuación

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n + b = x_{n+1}.$$

Por lo visto la desigualdad (4) equivale a la condición de que x_{n+1} no sea negativo. Si en cada una de las desigualdades que forman el sistema de limitaciones del problema dado, introducimos una incógnita suplementaria, procurando además que todas ellas sean no negativas, entonces el problema adquiere una forma normalizada (I), (II), (III), aunque con gran cantidad de incógnitas. Ilustraremos este procedimiento tomando como ejemplo el problema sobre la dieta. El sistema de restricciones en este problema se compone de tres desigualdades, por eso, introducimos tres incógnitas suplementarias x_3, x_4 y x_5. Como resultado, las limitaciones toman la forma de ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} a_1x_1 + a_2x_2 - x_3 &= a, \\ b_1x_1 + b_2x_2 - x_4 &= b, \\ c_1x_1 + c_2x_2 - x_5 &= c. \end{aligned}\right\}$$

Entre todas las soluciones no negativas de este sistema es preciso hallar aquella que minimiza la función

$$S = s_1x_1 + s_2x_2$$

De hecho, en la solución que buscamos nos interesan solamente los valores de x_1 y x_2.

Con frecuencia en problemas de la programación lineal se necesita hallar no el mínimo, sino el máximo de la función lineal f. Como quiera que máx $f = -\text{mín}(-f)$ (demuéstrelo), entonces un problema se reduce a otro cambiando f por $-f$.

Hemos demostrado que un problema de la programación lineal con restricciones-desigualdades se reduce a un problema con restricciones-ecuaciones. Es sumamente interesante la posibilidad de reducción inversa, o sea, cualquier problema de la programación lineal se puede formular de tal modo, que todas las restricciones tengan la forma de desigualdades. Nosotros no nos detendremos en ello.

Para finalizar haremos algunas objeciones con relación a la terminología aceptada. Cualquier solución no negativa de un sistema de restricciones se llama *admisible*. La solución admisible que da el mínimo a la función f, se llama *óptima*. La búsqueda de una solución óptima es, precisamente, nuestro fin. La solución óptima (si es que existe) no es, forzosamente, única: puede haber casos cuando existe un conjunto infinito de soluciones óptimas.

§ 14. EL "MÉTODO SIMPLEX"

Los problemas reales de la programación lineal contienen, por regla general, gran cantidad de restricciones incógnitas. Naturalmente que la resolución de estos problemas va relacionada con gran cantidad de cálculos. Esta dificultad se supera con ayuda de máquinas calculadoras de acción rápida. El algoritmo que compone la base de un programa de máquina puede estar relacionado con las especificidades de una clase determinada de problemas. Así, por ejemplo, para resolver el problema del transporte existen algoritmos sumamente simples, condicionados por las particularidades del sistema de limitaciones con respecto a estos problemas. No obstante, también existen métodos comunes que permiten hallar la solución de cualquier problema de la programación lineal realizando un número determinado de cálculos

(pasos). A éstos pertenecen, ante todo, el llamado "*método simplex*" y algunas de sus modificaciones*⁾.

1°. *Descripción del "método simplex"*. Veamos un problema de la programación lineal. Sea dado cierto sistema de ecuaciones lineales con n incógnitas $x_1, x_2, \ldots, x_n$ y cierta función lineal f. Entre las soluciones no negativas del sistema dado es preciso hallar aquella que minimiza la función f.

Para comenzar los cálculos por el "método simplex" es necesario que el sistema dado de ecuaciones sea reducido a tal forma, en la que algunas r incógnitas sean expresadas mediante las restantes y, además, que *los términos independientes de estas expresiones sean no negativos*. Supongamos, por ejemplo, que $n = 5$ y que las incógnitas, expresadas mediante las restantes, son x_1, x_2, x_3. Por consiguiente, el sistema de limitaciones se reduce a la forma

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \alpha + \alpha_4 x_4 + \alpha_5 x_5, \\ x_2 &= \beta + \beta_4 x_4 + \beta_5 x_5, \\ x_3 &= \gamma + \gamma_4 x_4 + \gamma_5 x_5, \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

siendo $\alpha \geqslant 0,\ \beta \geqslant 0,\ \gamma \geqslant 0.$ (2)

Se puede, en efecto, reducir un sistema a esta forma y cómo hacerlo, esta cuestión, se examinará más adelante (véase el apartado 2°). Las incógnitas x_1, x_2, x_3 de los primeros miembros del sistema (1), se denominan *incógnitas básicas* y todo el conjunto $\{x_1, x_2, x_3\}$, que designaremos para abreviar por B, se llama *base*; las demás incógnitas se denominan *no básicas* o *independientes***⁾. Sustituyendo en la expresión inicial de la función f las incógnitas básicas por sus expresiones obtenidas mediante las no básicas de (1). podemos escribir esta misma función f también mediante las incógnitas no básicas x_4 y x_5:

$$f = c + c_4 x_4 + c_5 x_5.$$

Consideramos todas las incógnitas no básicas iguales a cero:

$$x_4 = 0, \quad x_5 = 0,$$

*⁾ La denominación de "método simplex" no está relacionada con el contenido de la cuestión y se debe a una circunstancia casual.

**⁾ La última denominación se debe a que durante la búsqueda de todas las soluciones del sistema (1) (sin referirnos a problemas de la programación lineal), a estas incógnitas se les puede dar cualquier valor.

y mediante el sistema (1), hallamos el valor de las incógnitas básicas:

$$x_1 = \alpha, \quad x_2 = \beta, \quad x_3 = \gamma.$$

La solución de este sistema, obtenida de tal forma

$$(\alpha, \beta, \gamma, 0, 0),$$

a consecuencia de (2), será admisible. Esta solución se llama solución *básica*, correspondiente a la base $B = \{x_1, x_2, x_3\}$. Para la solución básica el valor de la función f es igual

$$f_B = c.$$

El proceso de resolución de problemas de la programación lineal mediante el "método simplex", se divide en una serie de etapas. Cada etapa consiste en pasar de la base dada B a otra B' de tal forma que el valor de f disminuya o, por lo menos, no aumente: $f_{B'} \leqslant f_B$. La base nueva B' se obtiene de la vieja B de una forma muy simple: de B se elimina una de las incógnitas y en lugar de ella se introduce otra (de las no básicas anteriores). Claro está que el cambio de base conduce a la reestructuración correspondiente del sistema (1). Después de una cantidad k de semejantes etapas, o bien obtenemos la base $B^{(k)}$, para la cual $f^{(k)}_B$ es el mínimo pedido de la función f y la correspondiente solución básica es óptima, o bien aclaramos que el problema no tiene solución.

Ilustraremos el "método simplex" con algunos ejemplos.

EJEMPLO 1 Supongamos que un sistema dado de restricciones y una función f son reducidos a la forma:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 1 - x_4 + 2x_5, \\ x_2 &= 2 + 2x_4 - x_5, \\ x_3 &= 3 - 3x_4 - x_5; \\ f &= x_4 - x_5. \end{aligned}\right\}$$

Aquí las incógnitas x_1, x_2, x_3 forman la base. La correspondiente solución básica será

$$(1, 2, 3, 0, 0);$$

el valor de f para esta solución es igual a 0.

Veamos si esta solución es óptima. Como quiera que x_5 entra en f con coeficiente negativo, podemos intentar disminuir el valor de f, aumentando el de x_5 (y conservando el valor nulo de x_4).

No obstante, esto se debe hacer con cuidado, ya que al variar x_5 cambian los valores de x_1, x_2, x_3, y por eso se debe procurar que ninguno de ellos se haga negativo.

Como quiera que el aumento de x_5 conduce al aumento de x_1, entonces para x_1 tal peligro no existe. Analizando x_2 y x_3 hallamos que x_5 puede ser aumentado hasta 2 (y no más, de lo contrario x_2 se hace negativo), lo que nos da $x_1 = 5$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$. Como resultado, obtenemos una nueva solución admisible (5, 0, 1, 0, 2), cuya cantidad de incógnitas positivas sigue siendo igual a tres. El valor de f, para esta solución, es igual a -2.

Ahora la base nueva está compuesta por x_1, x_5, x_3. Para realizar la reestructuración correspondiente del sistema de restricciones, es preciso expresar estas incógnitas mediante x_2 y x_4. Comenzaremos por la ecuación para x_2 (nueva incógnita no básica), por la cual expresamos x_5 (nueva incógnita básica):

$$x_5 = 2 + 2x_4 - x_2;$$

después expresamos x_1, x_3 y f:

$$x_1 = 1 - x_4 + 2(2 + 2x_4 - x_2),$$
$$x_3 = 3 - 3x_4 - (2 + 2x_4 - x_2),$$
$$f = x_4 - (2 + 2x_4 - x_2).$$

Así, pues, el problema se reduce a la forma

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 5 + 3x_4 - 2x_2, \\ x_5 &= 2 + 2x_4 - x_2, \\ x_3 &= 1 - 5x_4 + x_2, \end{aligned}\right\}$$
$$f = -2 - x_4 + x_2.$$

La nueva solución básica es

$$(5,\ 0,\ 1,\ 0,\ 2);$$

el valor de f, para esta solución, es igual a -2. Y con esto finaliza el primer paso del proceso.

Aclaremos si es posible disminuir aún más el valor de f. El coeficiente de x_4 en la expresión de f es negativo, por eso, se puede intentar disminuir f aumentando x_4 (sin cambiar $x_2 = 0$). La primera y segunda ecuaciones no lo impedirán en absoluto; por la tercera ecuación se ve que x_4 puede ser aumentado hasta $\frac{1}{5}$ (y no más, de lo contrario, x_3 se hace negativo). Suponiendo

que $x_4 = \frac{1}{5}$ y $x_2 = 0$, obtenemos $x_1 = \frac{28}{5}$,$x_5 = \frac{12}{5}$, $x_3 = 0$. Como resultado recibimos una solución admisible nueva $\left(\frac{28}{5}, 0, 0, \frac{1}{5}, \frac{12}{5}\right)$.

La base nueva ahora está compuesta por x_1, x_5, x_4. Por la ecuación para x_3 (nueva incógnita no básica) expresamos a x_4 (nueva incógnita básica):

$$x_4 = \frac{1}{5} - \frac{1}{5}x_3 + \frac{1}{5}x_2$$

y sustituimos x_4 por esta expresión en las restantes ecuaciones. Como resultado, el sistema adquiere la forma

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{28}{5} - \frac{3}{5}x_3 - \frac{7}{5}x_2, \\ x_5 &= \frac{12}{5} - \frac{2}{5}x_3 - \frac{3}{5}x_2, \\ x_4 &= \frac{1}{5} - \frac{1}{5}x_3 + \frac{1}{5}x_2, \end{aligned}\right\}$$

y para la función f se obtiene la expresión

$$f = -\frac{11}{5} + \frac{1}{5}x_3 + \frac{4}{5}x_2.$$

La nueva solución básica será

$$\left(\frac{28}{5}, 0, 0, \frac{1}{5}, \frac{12}{5}\right),$$

el valor de f correspondiente a ella, es igual a $-\frac{11}{5}$. Y con esto finaliza el segundo paso del proceso.

Como en la última expresión de la función f las dos incógnitas x_3 y x_2 van incluidas con coeficientes positivos, el mínimo de f se obtiene siendo $x_3 = x_2 = 0$. Esto significa que la última solución básica $\left(\frac{28}{5}, 0, 0, \frac{1}{5}, \frac{12}{5}\right)$ es óptima y el mínimo pedido de f es igual a $-\frac{11}{5}$; el problema está resuelto.

En el ejemplo analizado el proceso concluye con la determinación de la solución óptima. No obstante, existe una posibilidad más para finalizar dicho proceso. Para ilustrarla resolveremos el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 2.

$$\left.\begin{aligned} x_3 &= 1 + x_1 - x_2, \\ x_4 &= 2 - x_1 + 2x_2; \end{aligned}\right\}$$

$$f = -x_1 - x_2.$$

Aquí forman la base las incógnitas x_3 y x_4. La solución básica tiene la forma

$$(0,\ 0,\ 1,\ 2),$$

el valor correspondiente de f es igual a 0.

El coeficiente de x_1 en la expresión para f, es negativo, por eso, intentamos aumentar x_1 (no cambiando $x_2 = 0$). La primera ecuación no lo impide; por la segunda se ve que x_1 puede ser aumentado solamente hasta 2, lo que nos dará $x_3 = 3$, $x_4 = 0$. La nueva solución admisible será (2, 0, 3, 0); el valor de f para esta solución es igual a -2.

La nueva base ahora se compone por x_3 y x_1. Por la segunda ecuación expresamos a x_1 y sustituimos esta expresión en la primer ecuación y también en f. El problema adquiere la forma

$$\left.\begin{aligned} x_3 &= 3 - x_4 + x_2, \\ x_1 &= 2 - x_4 + 2x_2; \end{aligned}\right\}$$

$$f = -2 + x_4 - 3x_2.$$

La nueva solución básica es

$$(2,\ 0,\ 3,\ 0),$$

y el valor de f correspondiente a ella, es igual a -2.

En la última expresión para f el coeficiente de x_2 es negativo. Veamos en cuánto se puede disminuir el valor de f mediante el aumento de x_2 (conservando $x_4 = 0$). Con dicho fin examinemos los términos que contienen x_2 en ambas ecuaciones del sistema y vemos que los dos coeficientes de x_2 son positivos. Así, pues, x_2 se puede aumentar ilimitadamente sin que dejen de ser positivos x_3 y x_1. Al mismo tiempo, f adquirirá valores negativos tan grandes como se quiera por su valor absoluto. O sea, mín $f = -\infty$ (es decir, la función f no está limitada por abajo) y solución óptima no existe.

Como se ve por los ejemplos aducidos, el contenido de la siguiente etapa del "método simplex" es la elección de un coeficiente negativo para cierta incógnita no básica x, incluida en la expresión para f. Si resulta que tales coeficientes en lugar de uno son varios, entonces puede elegirse uno cualquiera de ellos. Esta circunstancia introduce en los cálculos cierto elemento de arbitrariedad. Mas con esto la arbitrariedad no forzosamente termina; puede suceder que al aumentar x_j hasta su límite extremo, inmediatamente varias incógnitas básicas se hacen nulas. Entonces cualquiera de ellas x_i puede intercambiarse con x_j, o sea, x_i puede pasar a ser no básica, mientras que x_j se incluye en la base.

Claro está que dicha arbitrariedad puede liquidarse introduciendo algún acuerdo complementario. No obstante, una necesidad imperiosa para ello no existe. De hecho, cierta arbitrariedad incluso es útil, ya que permite variar el proceso de los cálculos y, de esta forma, hallar una sucesión de etapas u operaciones que conduzcan a la resolución más rápida posible del problema.

2°. *Determinación de la primera base.* En el apartado anterior se describe el proceso de resolución de problemas de la programación lineal utilizando el "método simplex". En calidad de condición previa se exige que el sistema de restricciones sea reducido a la forma *).

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \alpha + \alpha_{r+1}x_{r+1} + \ldots + \alpha_n x_n, \\ x_2 &= \beta + \beta_{r+1}x_{r+1} + \ldots + \beta_n x_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_r &= \gamma + \gamma_{r+1}x_{r+1} + \ldots + \gamma_n x_n, \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

siendo $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0, \ldots, \gamma \geqslant 0$; entonces se dice que las incógnitas $x_1, x_2, \ldots, x_r$ forman una base.

En muchos problemas de la programación lineal la base se percibe directamente. En otros casos dicha base debe buscarse. Examinemos uno de los métodos para hallar la base llamado habitualmente método de base artificial.

Para ilustrar este método analicemos un ejemplo.

EJEMPLO. Sea dado un sistema de restricciones

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 - 7x_5 &= -4, \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 + 3x_5 &= 5, \end{aligned}\right\}$$

el cual debe ser resuelto con relación a cierta base inicial.

*) O a una forma análoga, que tenga en los primeros miembros de las ecuaciones, no $x_1, x_2, \ldots, x_r$, sino otras r incógnitas; las restantes $n-r$ incógnitas deben estar incluidas en los segundos miembros.

Primeramente transformamos dicho sistema de tal modo que los términos independientes de las ecuaciones sean no negativos. Para ello, debemos multiplicar los dos miembros de la primer ecuación por -1. Tendremos el sistema

$$\left.\begin{aligned} -2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 + 7x_5 = 4, \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 + 3x_5 = 5. \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

A continuación introducimos las incógnitas auxiliares o *artificiales* y_1 e y_2 (una en cada ecuación) de la siguiente forma:

$$\left.\begin{aligned} y_1 = 4 - (-2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 + 7x_5), \\ y_2 = 5 - (-x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 + 3x_5). \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Naturalmente que todas las soluciones del sistema (4) se pueden obtener mediante las soluciones del sistema (5), que satisfacen las condiciones $y_1 = 0$, $y_2 = 0$, y dejando de cada una de estas soluciones únicamente los valores de $x_1, \ldots, x_5$.

En el sistema (5) las incógnitas y_1 e y_2 forman una base. Supongamos que, partiendo de esta base, conseguimos pasar a otra sin contenido de incógnita artificial. Entonces, omitiendo en las ecuaciones obtenidas los términos con y_1 e y_2 (o, que es lo mismo, suponiendo que $y_1 = 0$ e $y_2 = 0$), obtenemos un sistema equivalente al sistema inicial (4), además, este sistema será resuelto con relación a cierta base.

Queda por resolver cómo pasar a no básicas las incógnitas y_1 e y_2 del sistema (5). Es interesante que con este fin podemos nuevamente utilizar el "método simplex". Concretamente, resolveremos con ayuda de este método el problema sobre la minimización de la función

$$F = y_1 + y_2$$

con las restricciones (5) y con las restricciones: $x_1 \geqslant 0, \ldots, x_5 \geqslant 0$, $y_1 \geqslant 0$, $y_2 \geqslant 0$. Las premisas necesarias para que sea válido el "método simplex", en este caso se mantienen, ya que el sistema (5) tiene la forma requerida para ello (tenemos determinada la base inicial y_1, y_2). Después de cierto número de pasos será obtenido el mínimo pedido. Como $F \geqslant 0$, entonces también mín $F \geqslant 0$, por eso, son posibles dos casos:

1. mín $F > 0$. Esto significa que el sistema (5) no tiene soluciones no negativas para las cuales $y_1 = 0$, $y_2 = 0$ (de lo contrario mín $F = 0$). Por consiguiente, *en este caso el sistema inicial* (4) *no tendrá soluciones no negativas.* De ello se deduce que

cualquier problema de la programación lineal, con un sistema así de restricciones es irresoluto.

2. mín $F = 0$. Supongamos que en este caso $(x_1^0, \ldots, x_5^0, y_1^0, y_2^0)$ son soluciones óptimas. Como $y_1^0 + y_2^0 = \text{mín } F = 0$, entonces $y_1^0 = 0$, $y_2^0 = 0$. De ello se deduce que $(x_1^0, \ldots, x_5^0)$ es solución no negativa del sistema inicial (4).

Así, pues, cuando mín $F = 0$, *el sistema de restricciones* (4) *tiene, por lo menos, una solución no negativa.*

Si al final de este proceso (es decir, cuando se ha alcanzado mín $F = 0$) resulta que las incógnitas artificiales y_1 e y_2 se encuentran entre las no básicas, entonces hemos logrado nuestro objetivo: la separación de una base entre las incógnitas $x_1, \ldots, x_5$. Si, por el contrario, resulta que algunas de las incógnitas y_1, y_2 siguen incluidas en la base, entonces será preciso continuar las transformaciones.

Así, pues, resolvamos el problema de minimización de la función

$$F = y_1 + y_2 = [4 - (-2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 + 7x_5)] + \\ + [5 - (-x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 + 3x_5)] = \\ = 9 + 3x_1 - 5x_2 + 4x_3 - 2x_4 - 10x_5.$$

El coeficiente de x_4 en la expresión para F es negativo, por eso, probamos disminuir el valor de F aumentando x_4. Comparando los coeficientes de x_4 en las ecuaciones (5) con los términos independientes, hallamos que x_4 puede ser aumentado solamente hasta 4; en este caso y_1 se hace nula. La nueva base está compuesta por x_4, y_2. Revolvemos la primera ecuación con relación a x_4 y ponemos la expresión obtenida para x_4 en la segunda ecuación y en F. El problema adquiere la forma

$$\left.\begin{aligned} x_4 &= 4 + 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 7x_5 - y_1, \\ y_2 &= 1 - x_1 - x_2 + 4x_5 + y_1; \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

$$F = 1 - x_1 - x_2 + 4x_5 + 2y_1.$$

Con esto finaliza la primera etapa del proceso. Como resultado de ello conseguimos hacer no básica la incógnita y_1.

El coeficiente de x_1, en la nueva expresión para F, es negativo. Analizando las ecuaciones (6), observamos que x_1 se puede aumentar solamente hasta 1; en este caso y_2 se hace nula. La base está compuesta por x_4, x_1. Transformando las ecuaciones (6) y la expresión para F (por cierto, esta última ya no forzosamente), obtenemos

$$\left.\begin{aligned} x_4 &= 6 - 4x_2 + 2x_3 + x_5 + y_1 - 2y_2, \\ x_1 &= 1 - x_2 + 4x_5 + y_1 - y_2; \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

$$F = y_1 + y_2.$$

Así, pues, como resultado de la segunda etapa las incógnitas artificiales y_1 e y_2 se convierten en no básicas. Eliminando en las ecuaciones (7) los términos que contienen y_1 e y_2, obtenemos

$$\left.\begin{aligned} x_4 &= 6 - 4x_2 + 2x_3 + x_5, \\ x_1 &= 1 - x_2 + 4x_5. \end{aligned}\right\}$$

Esto significa que en el sistema inicial (4) se ha separado la base. El problema está resuelto.

Como ya indicábamos antes, al hallar por el "método simplex" el mínimo de la función F, igual a la suma de las incógnitas artificiales, puede suceder que en el momento de finalizar el proceso (o sea, cuando se alcanza mín $F = 0$) una parte de las incógnitas artificiales aún continúa perteneciendo a la base. Con ayuda de unos procedimientos simples, los cuales demostraremos con un ejemplo, se puede convertir estas incógnitas en no básicas.

Supongamos, por ejemplo, que después de cierta cantidad de etapas el problema obtiene la forma

$$\left.\begin{aligned} x_2 &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x_1 + \frac{3}{2}x_3 - \frac{3}{2}x_4 - \frac{1}{2}x_5 - \frac{1}{2}y_1, \\ y_2 &= x_1 - x_3 + 11x_4 + 5x_5 + 2y_1, \\ y_3 &= 6x_1 + 6x_3 + 6x_4 + 4x_5 + 2y_1; \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

$$F = 7x_1 + 5x_3 + 17x_4 + 9x_5 + 5y_1.$$

Observaremos que la función F ha alcanzado ya su mínimo igual a cero, por lo tanto, se puede excluir del análisis ulterior. Las incógnitas y_2 e y_3 todavía continúan incluidas en la base. No obstante, los términos independientes en las ecuaciones para y_2 e y_3 son iguales a cero, y esto no es casual, pues, mín $F = 0$ significa que en la solución básica obtenida $y_2 = 0$ e $y_3 = 0$. Ahora nos valeremos de esta circunstancia para excluir de la base a y_2 e y_3. Para ello observaremos que en la ecuación para y_2 entre los coeficientes de las incógnitas $x_1, \ldots, x_5$, hay un número negativo: éste es el coeficiente -1 de x_3. Realicemos la sustitución $x_3 \leftrightarrow y_2$ (hacemos básica la incógnita x_3 y pasamos y_2 a las no básicas). Con este fin, resolvemos la segunda ecuación con relación a x_3 y ponemos la expresión obtenida para x_3 en las demás ecuaciones. Como quiera que el término independiente de la segunda ecuación es igual a cero, como resultado de esta operación los términos independientes de las ecuaciones no cambian (y, por lo tanto, siguen siendo no negativos).

Obtenemos:

$$\left.\begin{aligned} x_2 &= \frac{1}{2} + x_1 + 15x_4 + 7\ x_5 + \frac{5}{2}y_1 - \frac{3}{2}y_2, \\ x_3 &= \quad\ \ x_1 + 11x_4 + \ 5x_5 + \ 2y_1 - \ \ y_2, \\ y_3 &= \quad 12x_1 + 72x_4 + 34x_5 + 14y_1 - 6y_2. \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

Ahora en la ecuación para y_3 ya no hay coeficientes negativos (de $x_1, \ldots, x_5$), por eso, no será posible pasar y_3 a las incógnitas no básicas. Mas no deberemos disgustarnos demasiado por este hecho. Pues, si unos números cualesquiera $x_1, \ldots, x_5$ satisfacen el sistema inicial de restricciones, entonces y_1, y_2 e y_3 deberán igualarse a cero. Por lo tanto,

$$12x_1 + 72x_4 + 34x_5 = 0.$$

Ya que todos los coeficientes de las incógnitas tienen aquí un mismo signo, entonces de ello deberá deducirse:

$$x_1 = x_4 = x_5 = 0;$$

de tal forma, estas igualdades son consecuencias del sistema inicial de restricciones y de las condiciones $x_i \geqslant 0$ $(i = 1, \ldots, 5)$. Si las consideramos cumplidas, entonces el sistema (9) tomará la forma

$$\left.\begin{aligned} x_2 &= \frac{1}{2}, \\ x_3 &= 0. \end{aligned}\right\}$$

Así, pues, el sistema dado de restricciones, con la condición de que las incógnitas no son negativas, permite solamente una solución:

$$x_2 = \frac{1}{2}, \quad x_3 = 0, \quad x_1 = 0, \quad x_4 = 0, \quad x_5 = 0.$$

§ 15. TEOREMA DE LA DUALIDAD EN LA PROGRAMACIÓN LINEAL

En diferentes ramas de las matemáticas nos encontramos con los llamados *teoremas de la dualidad*. Cada uno de ellos permite formular para cualquier demostración o afirmación de una teoría determinada otra demostración por una regla uniforme y de tal modo, que de la justeza de la primera demostración automáticamente se deduce la justeza de la segunda. Un ejemplo formidable del teorema de la dualidad nos concede la programación lineal.

Sea dado un problema de la programación lineal, que en

adelante llamaremos *problema inicial* o, simplemente, *problema A*. Las restricciones se dan en forma de *desigualdades*. O sea, tenemos el sistema

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + b_1 \geqslant 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + b_2 \geqslant 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + b_m \geqslant 0, \end{array}\right\} \qquad (1)$$

de m desigualdades lineales con n incógnitas y la función lineal

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n.$$

Entre todas las soluciones no negativas ($x_1 \geqslant 0$, $x_2 \geqslant 0$, ..., $x_n \geqslant 0$) del sistema (1) es preciso elegir aquélla que comunique máximo valor a la función f (maximiza f).

Liguemos con el problema A un problema nuevo A', el cual llamaremos *dual* con relación al primero. He aquí su formulación: sea dado el sistema

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{m1}y_m + c_1 \leqslant 0, \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{m2}y_m + c_2 \leqslant 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \ldots + a_{mn}y_m + c_n \leqslant 0, \end{array}\right\} \qquad (1')$$

de n desigualdades lineales con m incógnitas y la función lineal

$$\varphi = b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m.$$

Entre todas las soluciones no negativas del sistema (1') es preciso elegir aquella que comunique a la función φ el valor mínimo posible (*minimiza* φ). Comparando los problemas A y A' observamos que:

1. El coeficiente de la j-ésima incógnita en la i-ésima ecuación del sistema (1') es el mismo que el coeficiente de la i-ésima incógnita en la j-ésima ecuación del sistema (1).

2. Los términos independientes de las desigualdades en cada uno de los problemas, coinciden con los coeficientes de las incógnitas en la función lineal del otro problema.

3. En el sistema de desigualdades del problema A todas las desigualdades son del tipo $\geqslant 0$, además, en este problema es preciso alcanzar el máximo de f. En el sistema de desigualdades del problema A', por el contrario, todas las desigualdades son del tipo $\leqslant 0$, y en él es preciso alcanzar el mínimo de φ.

Uno de los principales teoremas de la programación lineal, el así llamado *teorema de la dualidad*, afirma lo siguiente.

TEOREMA DE LA DUALIDAD. *Si un problema inicial tiene solución, entonces el problema dual a él también tiene solución. Al mismo tiempo, el máximo de la función f es igual al mínimo de la función φ:*

$$\text{máx } f = \text{mín } \varphi.$$

Demostraremos este teorema reduciéndolo a la cuestión de la compatibilidad de cierto sistema de desigualdades.

Para que sea más cómodo seguir la demostración, dividimos ésta en varias etapas.

ETAPA 1ª. LEMA. *Si $x_1^0, \ldots, x_n^0$, es cualquier solución no negativa del sistema* (1) *e $y_1^0, \ldots, y_m^0$, cualquier solución no negativa del sistema* (1′), *entonces los valores de las funciones f y φ para estas soluciones, están relacionadas por la desigualdad*

$$f_0 \leqslant \varphi_0.$$

DEMOSTRACIÓN. Analicemos las desigualdades del sistema (1), en las que en lugar de $x_1, \ldots, x_n$ hemos introducido los valores $x_1^0, \ldots, x_n^0$. Multipliquemos la primera de estas desigualdades por y_1^0, la segunda por y_2^0, y así sucesivamente, y sumemos las desigualdades obtenidas:

$$(a_{11}y_1^0x_1^0 + \ldots + a_{mn}y_m^0x_n^0) + b_1y_1^0 + \ldots + b_my_m^0 \geqslant 0$$

(se debe tener en cuenta que multiplicamos desigualdades por números no negativos, por eso, los signos de las desigualdades no cambian). Exactamente lo mismo, multipliquemos la primera desigualdad del sistema (1′) por x_1^0, la segunda, por x_2^0, etc., y sumemos después:

$$(a_{11}y_1^0x_1^0 + \ldots + a_{mn}y_m^0x_n^0) + c_1x_1^0 + \ldots + c_nx_n^0 \leqslant 0.$$

En ambos casos las expresiones entre paréntesis son iguales a la suma de los términos de la forma $a_{ij}y_i^0x_j^0$ con respecto a todos $i = 1, \ldots, m$; $j = 1, \ldots, n$. Por lo tanto, las dos expresiones entre paréntesis coinciden. Pero entonces

$$c_1x_1^0 + \ldots + c_nx_n^0 \leqslant b_1y_1^0 + \ldots + b_my_m^0,$$

o bien $f_0 \leqslant \varphi_0$. El lema queda demostrado.

ETAPA 2ª. *Reducción de los problemas A y A′ a la resolución de cierto sistema de desigualdades.*

Examinemos el siguiente sistema "combinado" de desigualdades:

$$\left.\begin{array}{ll}
a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n & + b_1 \geqslant 0, \\
\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\
a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n & + b_m \geqslant 0, \\
\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\
 & a_{11}y_1 + \ldots + a_{m1}y_m + c_1 \leqslant 0, \\
 & \ldots\ldots\ldots \\
 & a_{1n}y_1 + \ldots + a_{mn}y_m + c_n \leqslant 0, \\
\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\
c_1x_1 + \ldots + c_nx_n & -b_1y_1 - \ldots - b_my_m \geqslant 0.
\end{array}\right\} \quad (S)$$

Como podremos observar, este problema esta compuesto por los sistemas (1), (1') y por la desigualdad $f - \varphi \geqslant 0$. Incógnitas en el sistema (S) son $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m$ (total $n + m$ incógnitas). Ante todo estableceremos el siguiente hecho.

Si el sistema (S) *tiene solución no negativa* $x_1^0, \ldots, x_n^0, y_1^0, \ldots, y_m^0$, *entonces los números* $x_1^0, \ldots, x_n^0$ *dan solución al problema* A *y los números* $y_1^0, \ldots, y_m^0$, *solución al problema* A', *además,* $f_0 = \varphi_0$.

Nos detendremos un poco en hecho, para subrayar la importancia de principio que tiene la afirmación que acabamos de formular. En ella formidable es que *un problema de la programación lineal, es decir, un problema de maximización se reduce a la resolución de un sistema de desigualdades lineales sin ningunas exigencias de maximización.* De hecho, claro que la resolución del sistema (S) (en la región de valores no negativos de las incógnitas) no es, en absoluto, más fácil que la resolución de un problema inicial de la programación lineal (problema A); no obstante, el mismo hecho de tal redución es muy curioso.

Entonces, demostremos la afirmación hecha anteriormente. Ante todo está claro que los números $x_1^0, \ldots, x_n^0$ no son negativos y satisfacen el sistema (1); de la misma forma los números $y_1^0, \ldots, y_m^0$ no son negativos y satisfacen el sistema (1'). Además, para estos números, es válida la desigualdad

$$f_0 \geqslant \varphi_0$$

[que se desprende de la última desigualdad del sistema (S)]. Por otra parte, conforme al lema, tenemos

$$f_0 \leqslant \varphi_0.$$

Por lo tanto, $f_0 = \varphi_0$.

A continuación, si $x_1, \ldots, x_n$ es una solución no negativa cualquiera del sistema (1), entonces de nuevo conforme al lema tenemos

$$f \leqslant \varphi_0.$$

Comparando esta desigualdad con $f_0 = \varphi_0$ obtenemos $f \leqslant f_0$, de lo que se desprende que f_0 es valor máximo de f.

Lo mismo, si $y_1, \ldots, y_m$ es una solución no negativa cualquiera del sistema (1′), entonces conforme al lema tenemos

$$f_0 \leqslant \varphi;$$

comparando esta con $f_0 = \varphi_0$ obtenemos $\varphi_0 \leqslant \varphi$, es decir, φ_0 es valor máximo de φ. Con ello se demuestra la afirmación antes formulada.

ETAPA 3ª. *Conclusión de la demostración.* Nos queda ahora por demostrar lo siguiente: si el problema A tiene solución, entonces el sistema (S) tiene solución no negativa. Pues, en este caso, como acabamos de demostrar, $f_0 = \varphi_0$, es decir, máx $f =$ mín φ.

Partiremos de lo inverso, es decir, supongamos que el sistema (S) no tiene soluciones no negativas. Para este caso tenemos el corolario del teorema sobre sistemas incompatibles (§ 11). Cierto que este corolario se refiere a sistemas compuestos por desigualdades $\geqslant 0$, mientras que nuestro sistema (S) se compone por desigualdades $\leqslant 0$. Pero esta situación es fácil de corregir, escribiendo dicho sistema (S) de la forma

$$\left.\begin{array}{l:l}
a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n & + b_1 \geqslant 0, \\
\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n & + b_m \geqslant 0, \\
\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\
 & -a_{11}y_1 - \ldots - a_{m1}y_m - c_1 \geqslant 0, \\
\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\
 & -a_{1n}y_1 - \ldots - a_{mn}y_m - c_n \geqslant 0, \\
\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\
c_1x_1 + \ldots + c_nx_n & -b_1y_1 - \ldots - b_my_m \geqslant 0.
\end{array}\right\} (S')$$

Entonces, supongamos que el sistema (S') no tiene soluciones no negativas. Conforme a la consecuencia del teorema sobre sistemas incompatibles, se hallarán números no negativos $k_1, \ldots, k_m$,

$l_1, \ldots, l_n$, s (en total $m+n+1$ números) tales que*)

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}k_1 + \ldots + a_{m1}k_m + c_1 s \leqslant 0, \\ \cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \\ a_{1n}k_1 + \ldots + a_{mn}k_m + c_n s \leqslant 0; \end{array}\right\} \quad (2)$$

$$\left.\begin{array}{l} -a_{11}l_1 - \ldots - a_{1n}l_n - b_1 s \leqslant 0, \\ \cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \\ -a_{m1}l_1 - \ldots - a_{mn}l_n - b_m s \leqslant 0; \end{array}\right\} \quad (2')$$

$$b_1k_1 + \ldots + b_mk_m - c_1l_1 - \ldots - c_nl_n < 0. \quad (3)$$

De principio, demostraremos que el número s no es igual a cero. En efecto, supongamos que esto no es así, es decir, $s=0$. Veamos una solución cualquiera no negativa $x_1^0, \ldots, x_n^0$ del sistema (1). Razonando de la misma forma que para demostrar el lema, hallamos que

$$(a_{11}k_1x_1^0 + \ldots + a_{mn}k_mx_n^0) + b_1k_1 + \ldots + b_mk_m \geqslant 0.$$

Pero la expresión entre paréntesis es $\leqslant 0$ [esto resulta si se multiplica la primera desigualdad de (2) por x_1^0, la segunda por x_2^0 y así sucesivamente, teniendo al mismo tiempo en cuenta que $s=0$, y realizando después la suma]. De ello tenemos

$$h_1k_1 + \ldots + b_mk_m \geqslant 0, \quad (4)$$

después de lo cual de (3) se desprende

$$c_1l_1 + \ldots c_nl_n > 0.$$

A continuación, multiplicando las desigualdades (2') (en las que $s=0$) por un número positivo y arbitrario λ, tendremos

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}\lambda l_1 + \ldots + a_{1n}\lambda l_n \geqslant 0, \\ \cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \\ a_{m1}\lambda l_1 + \ldots + a_{mn}\lambda l_n \geqslant 0. \end{array}\right. \quad (5)$$

Si a cada una de las desigualdades (1), en las que en lugar de $x_1, \ldots, x_n$ hemos introducido $x_1^0, \ldots, x_n^0$, añadimos ahora su

*) Los números $k_1, \ldots, k_m$, $l_1, \ldots, l_n$, s son precisamente aquellos, por los cuales multiplicamos la primera, segunda, ..., $(m+n+1)$-ésima desigualdad del sistema (S') para obtener (después de sumar) la desigualdad contradictoria $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n + a'y_1 + \ldots \ldots + a'_my_m + d \geqslant 0$, siendo $a_1, \ldots, a_n$, $a'_1, \ldots, a'_m \leqslant 0$ y d, número negativo.

desigualdad correspondiente de (5), hallaremos que los números

$$x_1^0 + \lambda l_1, \ldots, x_n^0 + \lambda l_n,$$

también forman una solución no negativa del sistema (1). El valor de la función f para esta solución será igual a

$$c_1 x_1^0 + \ldots + c_n x_n^0 + \lambda (c_1 l_1 + \ldots + c_n l_n),$$

pero como la expresión entre paréntesis es estrictamente positiva, entonces el valor de f aumentará ilimitadamente al aumentar λ. Esto significa que máx $f = \infty$, es decir, a pesar de la condición, el problema A no tiene soluciones.

Así, pues, s no es igual a cero. Por lo tanto, de (2) se desprende que los números $\frac{k_1}{s}, \ldots, \frac{k_m}{s}$ forman una solución no negativa del sistema (1); de (2′), que los números $\frac{l_1}{s}, \ldots, \frac{l_n}{s}$ forman una solución no negativa del sistema (1′) y de (3), que para estas soluciones $\varphi - f < 0$. Pero esto contradice al lema. O sea, suponiendo que el sistema (S) no tiene soluciones no negativas, llegamos a una contradición. Por consiguiente, tales soluciones forzosamente existen, lo que demuestra el teorema de la dualidad.

EJEMPLO. Hallar el valor máximo de la función

$$f = 2x_2 + 12x_3$$

con la condición de que las variables x_1, x_2, x_3 son no negativas y satisfacen las desigualdades

$$\left.\begin{aligned} x_1 - x_2 - x_3 + 2 &\geqslant 0, \\ -x_1 - x_2 - 4x_3 + 1 &\geqslant 0. \end{aligned}\right\}$$

RESOLUCIÓN. Llamaremos al problema planteado problema A. El problema dual a él (problema A') deberá formularse así: hallar el valor mínimo de la función

$$\varphi = 2y_1 + y_2$$

con la condición de que las variables y_1 e y_2 son no negativas y satisfacen las desigualdades

$$\left.\begin{aligned} y_1 - y_2 &\leqslant 0, \\ -y_1 - y_2 + 2 &\leqslant 0, \\ -y_1 - 4y_2 + 12 &\leqslant 0. \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

El problema A' puede resolverse gráficamente, trazando en el plano

de coordenadas y_1Oy_2 la región de soluciones del sistema (6). Esto va representado en la fig. 51. Por esta misma figura se ve que la función φ alcanza su valor mínimo en el punto (0, 3), que es uno de los vértices de la región. Este valor es igual a tres. Conforme al teorema de la dualidad, el máximo de la función f también debe igualarse a tres.

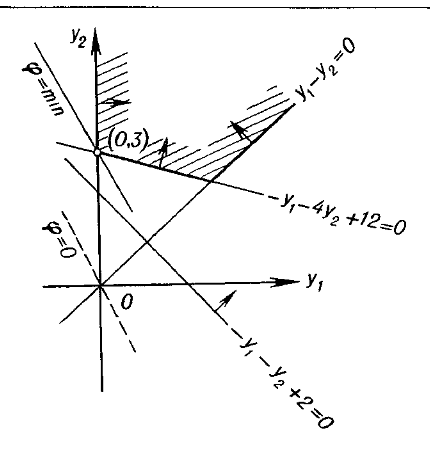


Fig. 51.

§ 16. RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA DEL TRANSPORTE

Entre los problemas de la programación lineal el problema del transporte ocupa un lugar especial, no solamente debido a su importancia práctica, sino también por el hecho de que al esquema del problema del transporte se reducen otros muchos problemas de la programación lineal.

Naturalmente, que el problema del transporte como otro cualquier problema de la programación lineal, puede ser resuelto utilizando el "método simplex". No obstante, merced a la estructura especial del sistema de restricciones de este problema, el procedimiento general del "método simplex", utilizado con relación

a dicho problema, se simplifica considerablemente. En este párrafo daremos el método de resolución del problema del transporte llamado *método de potenciales.* Este método representa una variante del "método simplex", adaptada especialmente al problema del transporte.

En primer lugar recordaremos la formulación matemática del problema del transporte. Para precisar, consideraremos que tenemos tres yacimientos, los cuales designamos ahora por A_1, A_2, A_3 y cuatro consumidores B_1, B_2, B_3, B_4, además, las reservas son iguales a a_1, a_2, a_3 y los consumos o necesidades, a b_1, b_2, b_3, b_4, respectivamente (se considera que $a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3 + b_4$).

Además de estos datos tenemos dados otros $3 \times 4 = 12$ datos

c_{11}	c_{12}	c_{13}	c_{14}
c_{21}	c_{22}	c_{23}	c_{24}
c_{31}	c_{32}	c_{33}	c_{34}

(es natural colocarlos en forma de tabla); c_{ij} representa el precio de transporte de una tonelada de carbón desde A_i hasta B_j. Naturalmente que todos los valores c_{ij} son no negativos. Las incógnitas en este problema son 3×4 valores

x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}
x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}
x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{34}

x_{ij} significa la cantidad de carbón, destinado para transportar desde A_i hasta B_j. El problema consiste en hallar unos valores de las incógnitas, para los cuales se cumplen las condiciones:

$$x_{ij} \geqslant 0, \quad (i = 1, 2, 3; \ j = 1, 2, 3, 4), \tag{3}$$

$$\left.\begin{aligned} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} &= a_1, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} &= a_2, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} &= a_3, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

$$\left.\begin{aligned} x_{11} + x_{21} + x_{31} &= b_1, \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} &= b_2, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} &= b_3, \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} &= b_4, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

y la función lineal

$$S = \sum c_{ij}x_{ij}, \quad (i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3, 4), \tag{6}$$

es mínima.

Señalaremos que las ecuaciones (4) y (5) son fáciles de recordar. En efecto, la i-ésima ecuación del sistema (4) significa que la suma de las incógnitas en el i-ésimo renglón de la tabla (2) es igual a a_i; por esta razón, llamaremos las ecuaciones (4) *horizontales.* Exactamente lo mismo en la j-ésima ecuación del sistema (5) se da el hecho de que la suma de las incógnitas de la j-ésima columna de la tabla (2) es igual a b_j; a consecuencia de ello llamaremos las ecuaciones del sistema (5), *verticales.*

1°. *Determinación de la primera base.* Como es sabido, a los cálculos por el "método simplex" precede una etapa preparatoria que es la determinación de la primera base. Para el problema del transporte existe un método, sumamente simple y cómodo, para hallar la primera base, el llamado *método del ángulo noroeste.* El contenido de este método será mejor explicarlo con un ejemplo concreto.

Como antes, supongamos que se tiene tres yacimientos A_1, A_2, A_3 (puntos de partida) y cuatro consumidores B_1, B_2, B_3, B_4 (puntos de destino), además las reservas y necesidades son iguales a las siguientes magnitudes:

$$a_1 = 60, \quad a_2 = 80, \quad a_3 = 110,$$

$$b_1 = 40, \quad b_2 = 30, \quad b_3 = 90, \quad b_4 = 90.$$

Estos datos van incluidos en la tabla 1

Tabla 1

	B_1	B_2	B_3	B_4	Reservas
A_1	40				60
A_2					80
A_3					110
Necesidades	40	30	90	90	

Probaremos cubrir las necesidades del primer consumidor B_1 con las reservas del primer yacimiento A_1. En este caso esto es posible, ya que las reservas, $a_1 = 60$, superan las necesidades, $b_1 = 40$.

Por lo tanto, escribimos en la casilla x_{11} la cifra 40. Las necesidades del punto B_1 resultan cubiertas totalmente y por eso, la columna que corresponde a B_1 temporalmente se puede excluir de los cálculos. Ahora podemos considerar que tenemos una nueva tabla 2, la cual incluye tres consumidores: B_2, B_3, B_4 y tres

Tabla 2

	B_2	B_3	B_4	
A_1				20
A_2				80
A_3				110
	30	90	90	

yacimientos: A_1, A_2, A_3; entonces las reservas en A_1 son iguales a $a'_1 = 60 - 40 = 20$. Observamos que en la tabla 2 la suma de todas las necesidades sigue siendo igual a la suma de todas las reservas.

Con respecto a la tabla 2 utilizamos el mismo procedimiento, o sea, probamos cubrir las necesidades, $b_3 = 30$, del punto B_2 (en la tabla 2 el punto B_2 desempeña el papel de primero) con las reservas $a'_1 = 20$ del punto A_1. Naturalmente que dichas necesidades se lograrán cubrir sólo en parte, puesto que $b_2 > a'_1$. Escribimos en la casilla x_{12} la cifra 20, que es lo máximo que se puede transportar de A_1 a B_2. Con ello, las necesidades de B_2 se reducen hasta $b'_2 = 10$ y las reservas de A_1 quedan agotadas por completo. En virtud de esto, el renglón de la tabla 2, correspondiente a A_1, se puede eliminar temporalmente. Así, pues, llegamos a la tabla 3, la cual contiene ya dos yacimientos: A_2 y A_3 y tres consumidores: B_2, B_3, B_4.

Por el mismo procedimiento, continuamos simplificando consecutivamente las tablas obtenidas hasta cubrir las necesidades

Tabla 3

	B_2	B_3	B_4	
A_2				80
A_3				110
	10	90	90	

de todos los consumidores. Según las condiciones del problema, esto conduce al agotamiento de las reservas de todos los yacimientos.

Durante el proceso de simplificación de las tablas obtenemos los siguientes valores para algunas de las incógnitas:

$$x_{11} = 40, \quad x_{12} = 20, \quad x_{22} = 10, \quad x_{23} = 70, \quad x_{33} = 20, \quad x_{34} = 90. \qquad (7)$$

Pasando estos valores a la tabla 1, obtenemos la tabla 4.

Tabla 4

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	40	20		
A_2		10	70	
A_3			20	90

Denominaremos por *básicas* las casillas de la tabla 4 en las que hemos puesto los valores de las incógnitas y las restantes, por *libres*. Considerando que los valores de las incógnitas x_{ij}, correspondientes a las casillas libres, son iguales a cero, el conjunto de valores de todas las incógnitas nos dará la solución admisible de nuestro problema [o sea, se cumplen las condiciones (3), (4) y (5)]. Efectivamente, la suma de valores de las incógnitas, en cada renglón de la tabla, es igual a la reserva en el yacimiento correspondiente, y en cada columna, igual a las necesidades del

consumidor correspondiente. Por eso, las ecuaciones (4) y (5) se verifican. Ahora queda aún por demostrar que los valores de todas las incógnitas no son negativos.

En el caso general, es decir, con cualquier cantidad m de yacimientos y cualquier cantidad n de consumidores, el método descrito permite rellenar $m + n - 1$ casillas de la tabla. En efecto, por cada paso u operación rellenamos una casilla justamente, después de lo cual tachamos en dicha tabla un renglón o una columna; excepción es el último paso cuando la tabla contiene sólo una casilla, rellenando la cual excluimos a la vez un renglón y una columna. Como la cantidad de renglones es igual a m y la cantidad de columnas igual a n, entonces está claro que la cantidad de pasos y, por lo tanto, la cantidad de casillas (básicas) rellenas es igual a $m + n - 1$.

Demostremos ahora que el sistema de limitaciones (4), (5) puede resolverse con relación a las incógnitas que corresponden a las casillas básicas. De ello se deducirá que dichas incógnitas pueden ser tomadas como básicas, mientras que las demás incógnitas, correspondientes a las casillas libres de la tabla, como independientes.

Para realizar la demostración, unamos las casillas básicas con una línea quebrada manteniendo el mismo orden en que estas surgieron durante el proceso descrito anteriormente. Para el ejemplo examinado resulta una línea quebrada de la siguiente forma:

x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}
x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}
x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{34}

Ahora no será difícil observar que las incógnitas situadas en las casillas básicas, pueden ser expresadas mediante las incógnitas situadas en las casillas libres. Estas expresiones se hallan consecutivamente:

para x_{11}, por la primera ecuación vertical;
a continuación para x_{12}, por la primera ecuación horizontal;
a continuación para x_{22}, por la segunda ecuación vertical;
a continuación para x_{23}, por la segunda ecuación horizontal;
a continuación para x_{33}, por la tercera ecuación vertical;

por fin, para x_{34}, por la tercera ecuación horizontal (o por la cuarta vertical).

Así, pues, hemos hallado un conjunto de incógnitas básicas para el problema dado

$$x_{11}, \quad x_{12}, \quad x_{22}, \quad x_{23}, \quad x_{33}, \quad x_{34}.$$

2°. *Resolución del problema por el método de potenciales.* El hallazgo de la primera base, en la resolución de este problema, es una etapa únicamente preparatoria. Una vez finalizada esta etapa, todas las incógnitas resultan divididas en dos grupos:

$$x_{kl}, \text{ básicas}, \quad x_{pq}, \text{ independientes}.$$

De hecho, a nosotros no nos será preciso expresar las incógnitas básicas mediante las independientes. Ahora, en lo que se refiere a la función S (precio total de todos los transportes), si nos será forzosamente preciso conocer su expresión mediante las incógnitas independientes. En otras palabras, es preciso expresar la función S de la forma

$$S = \sum_{p,q} s_{pq}x_{pq} + s. \qquad (8)$$

Demostraremos, cómo hallar los coeficientes s_{pq} de las incógnitas independientes.

Con cada yacimiento o punto de partida A_i ponemos en correspondencia cierta magnitud α_i, "potencial" del punto A_i ($i = 1, 2, 3$). De forma análoga, con cada consumidor o punto de destino B_j ponemos en correspondencia la magnitud β_j, "potencial" del punto B_j ($j = 1, 2, 3, 4$). Ligamos estas magnitudes entre sí de la siguiente forma: para cada incógnita básica x_{kl} componemos una ecuación

$$\alpha_k + \beta_l = c_{kl}, \qquad (9)$$

en la cual c_{kl} significa lo mismo que antes, o sea, el precio de transporte de una tonelada de carga desde el punto A_k hasta el punto B_l. El conjunto de ecuaciones de la forma (9), compuestas para todas las incógnitas básicas x_{pq}, forma un sistema de ecuaciones lineales. Este sistema contiene $3 + 4 - 1$ ecuaciones (tantas, cuantas sean las incógnitas básicas) y $3 + 4$ incógnitas α_k, β_l (tantas, cuantos haya yacimientos y consumidores en conjunto)*).

*) En el caso general, cuando se tiene m puntos de partida (yacimientos) y n puntos de destino (consumidores) el sistema dado se compone de $m + n - 1$ ecuaciones con $m + n$ incógnitas.

Se puede demostrar que este sistema es siempre compatible, además, el valor de una de las incógnitas puede tomarse arbitrariamente y, entonces, los valores de las restantes se determinan por el sistema unívocamente.

Fijamos cualquier solución $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)$ del sistema de ecuaciones (9) y después, para cada incógnita independiente x_{pq}, hallemos la suma $\alpha_p + \beta_q$. Designamos dicha suma por c'_{pq}:

$$\alpha_p + \beta_q = c'_{pq},$$

la cual llamaremos precio indirecto (a diferencia del precio real c_{pq}). Entonces resulta que en la expresión (8) los coeficientes de las incógnitas independientes son iguales a

$$s_{pq} = c_{pq} - c'_{pq}. \tag{10}$$

La fórmula (10) será demostrada en el punto 3°.

Si todos los valores de s_{pq} son no negativos, entonces la solución básica inicial será óptima. Si es que entre ellos los hay negativos, supongamos $s_{p_0q_0}$, entonces se pasa a la siguiente base. Este paso, como recordamos, comienza de la siguiente forma. Aumentamos $x_{p_0q_0}$ (dejando las demás incógnitas independientes iguales a cero). Si es que con ello surge un momento en que una de las incógnitas básicas, supongamos $x_{k_0l_0}$, se hace nula, entonces pasamos a una base nueva eliminando de la base anterior la incógnita $x_{k_0l_0}$ e introduciendo, en lugar de ella, $x_{p_0q_0}$. Con el traslado a la nueva base finaliza una de las etapas u operaciones del "método simplex".

Por ahora, hemos expuesto solamente algunos razonamientos necesarios para el conocimiento del método de potenciales. En lo que se refiere a la solución real del problema, para su explicación, mejor será analizar un ejemplo.

EJEMPLO. Son dados tres puntos de partida A_1, A_2, A_3 con reservas

$$a_1 = 60, \quad a_2 = 80, \quad a_3 = 110,$$

y cuatro puntos de destino B_1, B_2, B_3, B_4 con necesidades (consumos)

$$b_1 = 40, \quad b_2 = 30, \quad b_3 = 90, \quad b_4 = 90.$$

Los valores de c_{ij} (precios de tansporte de una tonelada de carga desde A_i hasta B_j) se dan en la siguiente tabla:

Tabla 5

1	2	3	4
5	6	7	10
4	2	1	4

Resolución: Comenzamos por la determinación de la primera solución básica. En dicho caso, el método del ángulo noroeste conduce al siguiente resultado (véase el ejemplo del anterior apartado 1°):

Tabla 6

40	20		
	10	70	
		20	90

Designamos esta solución brevemente por $\underset{1}{X}$. El valor de la función S será para ella igual a

$$\sum c_{ij}x_{ij} = 1 \cdot 40 + 2 \cdot 20 + 6 \cdot 10 + 7 \cdot 70 + 1 \cdot 20 + 4 \cdot 90 = 1010.$$

Para hallar los potenciales es preciso resolver el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 + \beta_1 &= c_{11} = 1, \\ \alpha_1 + \beta_2 &= c_{12} = 2, \\ \alpha_2 + \beta_2 &= c_{22} = 6, \\ \alpha_2 + \beta_3 &= c_{23} = 7, \\ \alpha_3 + \beta_3 &= c_{33} = 1, \\ \alpha_3 + \beta_4 &= c_{34} = 4, \end{aligned}\right\}$$

además, a nosotros nos satisface *cualquier* solución de este sistema. El valor de una de las incógnitas, como ya indicábamos, se puede prefijar arbitrariamente. Suponiendo que $\alpha_1 = 1$, hallamos sucesi-

vamente:

$$\beta_1 = 0, \quad \beta_2 = 1, \quad \alpha_2 = 5, \quad \beta_3 = 2, \quad \alpha_3 = -1, \quad \beta_4 = 5.$$

Después hallamos los precios indirectos c'_{pq}:

$$c'_{13} = \alpha_1 + \beta_3 = 3',$$
$$c'_{14} = \alpha_1 + \beta_4 = 6',$$
$$c'_{21} = \alpha_2 + \beta_1 = 5',$$
$$c'_{24} = \alpha_2 + \beta_4 = 10',$$
$$c'_{31} = \alpha_3 + \beta_1 = (-1)',$$
$$c'_{32} = \alpha_3 + \beta_2 = 0'.$$

Más cómodo es realizar estos cálculos con ayuda de la tabla 7 en la que, al principio, van inscritos solamente los valores de c_{kl} para todas las casillas básicas.

Tabla 7

$\alpha \diagdown \beta$				
	1	2		
		6	7	
			1	4

Admitiendo que $\alpha_1 = 1$ calculamos por la regla dada anteriormente los potenciales α_k y β_l, los cuales inscribimos en las casillas

Tabla 8

$\alpha \diagdown \beta$	0	1	2	5
1	1	2		
5		6	7	
−1			1	4

correspondientes; obtenemos la tabla 8. Después hallamos los precios indirectos c'_{pq}, los cuales inscribimos en las casillas correspondientes; obtenemos la tabla 9.

Tabla 9

$\alpha \backslash \beta$	0	1	2	5
1	1	2	3′	6′
5	5′	6	7	10′
−1	(−1)′	0′	1	4

De hecho, las tres etapas elementales analizadas pueden ser unidas en una.

Determinemos ahora las diferencias $s_{pq} = c_{pq} - c'_{pq}$. En el caso dado

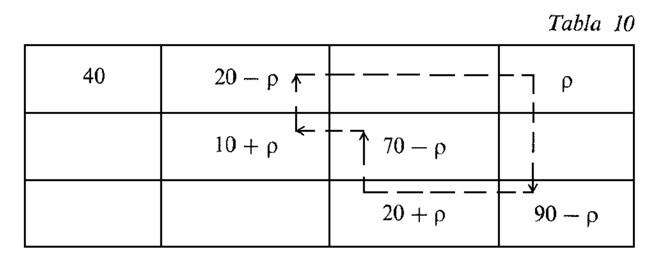
$$s_{13} = 3 - 3' = 0,$$
$$s_{14} = 4 - 6' = -2,$$
$$s_{21} = 5 - 5' = 0,$$
$$s_{24} = 10 - 10' = 0,$$
$$s_{31} = 4 - (-1)' = 5,$$
$$s_{32} = 2 - 0' = 2.$$

Por consiguiente, la expresión de la función S, dada mediante las incógnitas independientes, tendrá la forma

$$S = 1010 - 2x_{14} + 5x_{31} + 2x_{32}. \qquad (11)$$

Entre los coeficientes de las incógnitas en el segundo miembro los hay negativos, a saber, el coeficiente de x_{14}. Por lo tanto, se puede intentar disminuir el valor de S aumentando el de x_{14} (y conservando nulos los valores de las demás incógnitas independientes). Suponemos $x_{14} = \rho > 0$. Como quiera que las sumas de valores de las incógnitas por renglones y columnas, deben permanecer invariables, entonces la adición o sustracción de ρ de los valores de las incógnitas básicas, deberá realizarse de la forma siguiente:

Tabla 10



40	20 – ρ		ρ
	10 + ρ	70 – ρ	
		20 + ρ	90 – ρ

La adición de ρ a x_{14} fue necesario compensarla restando ρ de x_{34}, esto, a su vez, se compensa sumando ρ a x_{33} y así sucesivamente, hasta el momento en que retornamos a x_{14}.

Nos detendremos en esto para hacer una observación con respecto a la tabla 10. Pasando por las casillas de esta tabla en el mismo orden que compensamos ρ, obtenemos una línea quebrada y cerrada, compuesta alternativamente por trozos horizontales y verticales; en la tabla ésta es la línea de trazos. Uno de los vértices de dicha línea se sitúa en una casilla libre (en nuestro caso, en la casilla x_{14}) y los restantes, en las casillas básicas (por cierto que no obligatoriamente en todas; en la tabla 10 la casilla x_{11} no figura). Una línea quebrada así se llama *ciclo*, o más exacto, *ciclo de recuento* correspondiente a la casilla libre dada.

Como se puede observar por la tabla 10, la condición de que las incógnitas sean no negativas permite aumentar ρ solamente hasta 20. Suponemos que $\rho = 20$, entonces x_{12} se hace nula. Así pues, introducimos en la base la incógnita x_{14}, y pasamos la incógnita x_{12} a las independientes. La nueva solución básica será

$X_2 =$

40			20
	30	50	
		40	70

el valor de la función S para ella será

$$1010 - 2 \cdot 20 = 970,$$

(suponemos en (11) $x_{14} = \rho = 20$ y consideramos los valores de

las demás incógnitas iguales a cero). Con el traslado a una nueva base finaliza una de las etapas del proceso. Hemos logrado disminuir el valor de la función S en 40 unidades.

Hagamos cierto resumen. Al comienzo de la primera etapa teníamos dada la solución básica inicial $\underset{1}{X}$. Esta etapa consistía en pasar a una nueva solución de base $\underset{2}{X}$ y se componía de las siguientes etapas:

1) hallazgo de los potenciales α_k, β_l y de los precios indirectos

$$c'_{pq} = \alpha_p + \beta_q;$$

2) determinación de las diferencias $s_{pq} = c_{pq} - c'_{pq}$;

3) elección de una casilla libre, correspondiente a la diferencia negativa s_{pq}, y constitución del ciclo de recuento para esta casilla;

4) determinación de una nueva solución básica y de un nuevo valor de la función S.

Observaremos que si todas las diferencias s_{pq} resultasen no negativas, esto significaría que la solución básica $\underset{1}{X}$ es óptima. Entonces las etapas 3) y 4) naturalmente que sobrarían. Así pues, *el criterio de finalización del proceso es que todas las diferencias* s_{pq} *sean no negativas.*

Mas, volvamos al ejemplo que analizamos. La siguiente etapa comienza por la determinación de los potenciales, precios indirectos y por la determinación de las diferencias s_{pq}. Los correspondientes cálculos tendrán la siguiente forma:

α \ β	0	−1	0	3
1	1	0′	1′	4
7	7′	6	7	10′
1	1′	0′	1	4

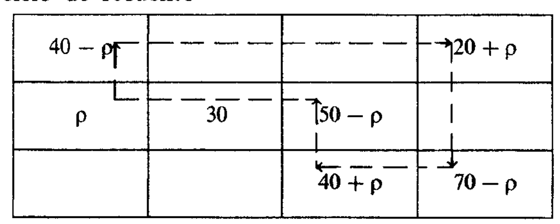
$$s_{12} = 2 - 0' = 2, \quad s_{24} = 10 - 10' = 0,$$

$$s_{13} = 3 - 1' = 2, \quad s_{31} = 4 - 1' = 3,$$

$$s_{21} = 5 - 7' = -2, \quad s_{32} = 2 - 0' = 2,$$

$$S = 970 + 2x_{12} + 2x_{13} - 2x_{21} + 3x_{31} + 2x_{32}.$$

Entre los coeficientes de las incógnitas en el segundo miembro, tenemos nuevamente un coeficiente negativo: es el coeficiente de x_{21}. Fijamos la atención en la casilla x_{21} y componemos para ella un ciclo de recuento



Después de revisar este ciclo llegamos a la conclusión que ρ se puede aumentar solamente hasta 40. Suponemos que $\rho = 40$ y pasamos a una nueva solución básica:

$\underset{3}{X} =$

			60
40	30	10	
		80	30

El valor de la función S para esta solución es igual a

$$970 - 2 \cdot 40 = 890.$$

La segunda etapa finaliza después de pasar de $\underset{2}{X}$ a $\underset{3}{X}$.

La tercera etapa comienza también por la determinación de los potenciales, precios indirectos y diferencias s_{pq}. Tenemos:

α \ β	−2	−1	0	3
1	(−1)′	0′	1′	4
7	5	6	7	10′
1	(−1)′	0′	1	4

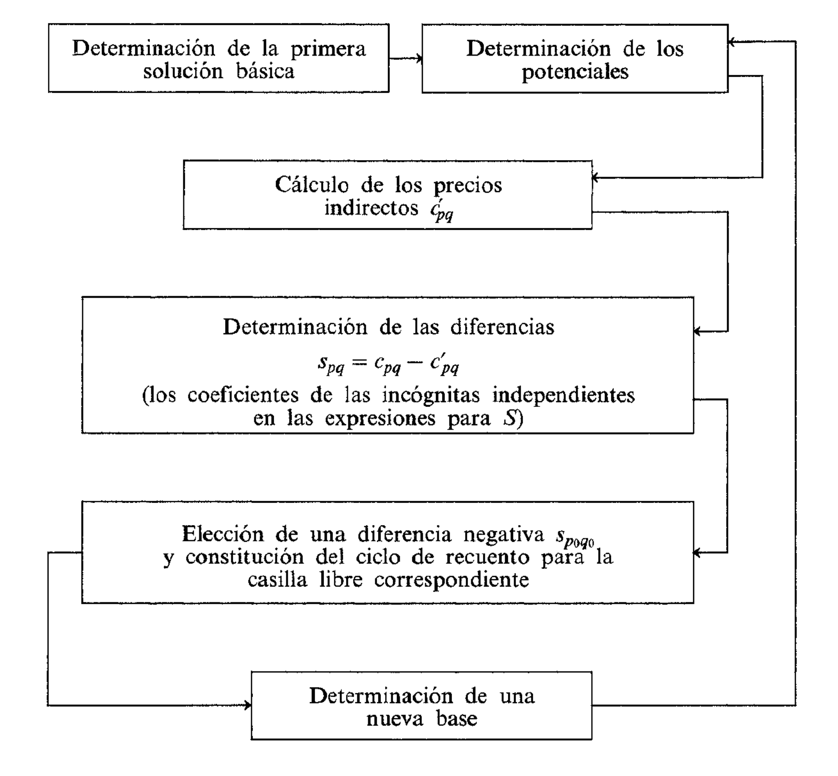
$$s_{11} = 1 - (-1)' = 2 \qquad s_{24} = 10 - 10' = 0$$
$$s_{12} = 2 - 0' = 2 \qquad s_{31} = 4 - (-1)' = 5$$
$$s_{13} = 3 - 1' = 2 \qquad s_{32} = 2 - 0' = 2.$$

Ahora todas las diferencias s_{pq} son no negativas. Esto significa que la última solución básica $\underset{3}{X}$ es óptima y que el valor (mínimo) de la función S, correspondiente a esta solución, es igual a 890.

Así pues, la solución óptima del problema está hallada:

$$\begin{cases} x_{14} = 60, \quad x_{21} = 40, \quad x_{22} = 30, \quad x_{23} = 10, \quad x_{33} = 80, \\ x_{34} = 30, \quad \text{las restantes } x_{ij} \text{ son iguales a } 0. \end{cases}$$

Para finalizar daremos una vez más, pero ahora ya esquemáticamente, el procedimiento de solución del problema del transporte



OBSERVACIÓN. Si todas las diferencias s_{pq} resultan no negativas, entonces la última solución básica es óptima.

3°. *Argumentación del método de potenciales* [*demostración de la fórmula* (10)]. El punto central en el método de solución que acabamos de describir es la fórmula (10), que permite hallar la expresión de la función S mediante las incógnitas independientes. La deducción de esta fórmula hemos acordado examinar aparte. Lo haremos a continuación.

Con este fin volvamos al análisis de la tabla 10, que contiene el ciclo de recuento para la casilla x_{14}. Dicha tabla nos sirvió para hallar ρ y, con ello, pasar a una solución básica nueva. Pero esta tabla permite también resolver otro problema, mediante el cual se puede determinar con qué coeficientes va incluida la incógnita independiente x_{14} en la expresión para las incógnitas básicas.

Ante todo, haremos la siguiente objeción: si se indican los valores de las incógnitas independientes, entonces los valores de las incógnitas básicas se determinan unívocamente. Ahora bien, la tabla 10 nos da, precisamente, una idea de lo que sucede con los valores de las incógnitas básicas, cuando a la incógnita independiente x_{14} se le da el valor ρ (mientras que las demás incógnitas independientes se consideran iguales a cero). Por la tabla se puede apreciar que x_{14} entra en las expresiones para las incógnitas básicas con los siguientes coeficientes:

$$\begin{array}{llll} \text{en } x_{34}, & \text{con el coeficiente} & & -1 \\ \text{en } x_{33}, & \text{"} \quad \text{"} & \text{"} & +1 \\ \text{en } x_{23}, & \text{"} \quad \text{"} & \text{"} & -1 \\ \text{en } x_{22}, & \text{"} \quad \text{"} & \text{"} & +1 \\ \text{en } x_{12}, & \text{"} \quad \text{"} & \text{"} & -1 \end{array} \qquad (12)$$

En las demás expresiones para las incógnitas básicas (precisamente, en x_{11}), x_{14} va incluida con el coeficiente 0. Revisando el ciclo observaremos que los coeficientes de interés para nosotros adquieren, consecutivamente, los valores $+1$ y -1.

Ahora queda por resolver la cuestión: ¿con qué coeficiente entra x_{14} en la expresión de la función S, obtenida mediante las incógnitas independientes? Pero esta expresión

$$S = 1010 + s_{13}x_{13} + s_{14}x_{14} + s_{21}x_{21} + s_{24}x_{24} + s_{31}x_{31} + s_{32}x_{32}$$

se obtiene cuando en la expresión inicial de S:

$$S = \sum c_{ij} x_{ij} \quad (i = 1,\ 2,\ 3; \quad j = 1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

sustituimos las incógnitas básicas por sus expresiones obtenidas mediante las independientes. En nuestro caso es preciso en lugar de x_{11}, x_{12}, x_{22}, x_{23}, x_{33}, x_{34} poner sus expresiones obtenidas mediante x_{13}, x_{14}, x_{21}, x_{24}, x_{31}, x_{32}. Conforme a (12) el coeficiente total de x_{14} será

$$s_{14} = c_{14} - c_{34} + c_{33} - c_{23} + c_{22} - c_{12}.$$

De esto,

$$S_{14} = c_{14} - (\alpha_3 + \beta_4) + (\alpha_3 + \beta_3) - (\alpha_2 + \beta_3) + \\ + (\alpha_2 + \beta_2) - (\alpha_1 + \beta_2) = c_{14} - (\alpha_1 + \beta_4),$$

o bien

$$s_{14} = c_{14} - c'_{14}.$$

Pero esto es precisamente la fórmula (10) (para el caso dado). Los razonamientos que nos conducen a la última igualdad, son lo suficiente elocuentes y no hay necesidad de repetirlos para el caso general.

Por último diremos algunas palabras sobre otros métodos de solución del problema del transporte. El método de potenciales, antes examinado, se utiliza, por regla general, cuando los cálculos se hacen a mano, ya que una de sus etapas, a saber la composición del ciclo de recuento es difícil de realizar en máquinas calculadoras. Cuando la cantidad de suministradores y consumidores es grande (en límites de decenas), este método, en un plazo satisfactorio, da solución óptima. Si la cantidad de suministradores y consumidores es demasiado grande (precisamente así ocurre con los problemas de la planificación de la economía nacional, cuando estas cantidades alcanzan centenares), los cálculos a máquina son indispensables. Los algoritmos que forman la base del programa de máquina, están basados ya en otras consideraciones, distintas a las que forman la base del método de potenciales. Estos algoritmos se estudian más detenidamente en literatura especial, dedicada al problema del transporte.

Lecciones populares de matemáticas

Obras de nuestro sello
editorial 1980

Lecciones populares
de matemáticas

Argunov B., Skorniakov L.

Teoremas de configuración

Beskin N.

División del segmento en la razón dada

Fetisov A.

Sobre las demostraciones en la geometría

Kostovski A.

Construcciones geométrica mediante
un sólo compás

Editorial MIR



Moscú